Logarithmen Regeln

- negative integers are undefined : $\log(-6)$
- zero is undefined : $\log_{10}(0)$
- $\log(1) = 0$

Problem

$\dfrac{\log_3(n)}{\log_2(n)}$ ist nicht im Kopf berechenbar → Basis ändern!

$$\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} = \log_a(x)$$

Lösung:

$$\frac{\log_3(n)}{\log_2(n)} = \frac{\dfrac{\log_2(n)}{\log_2(3)}}{\dfrac{\log_2(n)}{1}} =$$

$$= \frac{\log_2(n)}{\log_2(3)} : \frac{\log_2(n)}{1} = \frac{1}{\log_2(3)} \Bigg\} \text{konstante}$$

Beispiel!

$$\frac{\log_{10}(16)}{\log_{10}(2)} = \log_2(16) =$$

$$= 4$$

weitere Beispiele!

$$\log_3(5) = \frac{\log_e(5)}{\log_e(3)} = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3)} \ldots$$

$$5^2 = e^{\ln(5^2)} = 10^{\log_{10}(5^2)} = 100^{\log_{100}(5^2)}$$

Rechenregeln

$a^x = e^{\ln(a^x)}$

$\log_a x = \dfrac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

Beweis:

$a^{\log_a(b)} = b$

$\log_c\left(a^{\log_a(b)}\right) = \log_c(b)$

$\log_a(b) \cdot \log_c(a) = \log_c(b)$

$\log_a(b) = \dfrac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$

Daraus folgt:

- $\log_a(b) = \dfrac{1}{\log_b(a)}$
- $\log_{\frac{1}{a}}(b) = \dfrac{-1}{\log_a(b)}$
- $\log_{a^m}(a^n) = \dfrac{n}{m}$

Sätze Folgen

4.9 <u>Vollständigkeitssatz für die reelen Zahlen:</u>

Jede nach oben oder unten beschränkte nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum oder Infimum

4.11 Jede konvergente Folge ist beschränkt (hat obere & untere Schranke)

4.12 <u>Hauptsatz über monotone Folgen</u>

Wenn monotone Folge beschränkt ist, ist sie konvergent

4.22 <u>Sandwich-Theorem</u>

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$$a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

4.26 Wenn a_n einen Häufungspunkt besitzt dann $\exists$ Teilfolge a_{n_k} sodass es gegen den Häufungspunkt konvergiert

4.27 <u>Satz von Bolzano-Weierstraß</u>

Jede beschränkte Folge enthält einen Häufungspunkt

(Häufungspunkte = konvergente Teilfolgen)

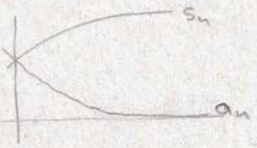
4.29 <u>Cauchy-Kriterium</u>

Cauchy-Folgen sind konvergent

Sätze für unendliche Reihen

4.35 Wenn S_n konvergiert: $a_n \to 0$

$S_n = \sum_{n \geq 0} a_n$ — wenn a_n nicht Nullfolge ist konvergiert S_n auch nicht



4.39 „Cauchy-Kriterium"

Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$ ist konvergent wenn

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon)$ sodass für $m \geq n > N(\varepsilon)$: $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon$

4.40 Leibniz-Konvergenzkriterium

Sei Reihe „alternierend": $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$

Dann konvergiert sie auch wenn: $a_n \to 0$ und a_n monoton fallend

4.44 „Absolute Konvergenz"

Wenn $\sum |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum a_n$

4.46 „Riemann'scher Umordnungssatz"

Eine bedingt konvergente Reihe lässt sich so umordnen, dass sie gegen $\alpha \in \mathbb{R}$ oder $\pm\infty$ konvergiert

4.48 „Majoranten-Kriterium"

$\exists \sum a_n \wedge \exists \sum b_n$

für fest alle n gilt $|a_n| \leq b_n$

wenn $\sum b_n$ konvergent ist, ist $\sum a_n$ absolut konvergent

4.49 „Minoranten-Kriterium"

$\exists \sum a_n \wedge \exists \sum b_n$

für fest alle n gilt $0 \leq a_n \leq b_n$

wenn $\sum a_n$ divergent ist, ist $\sum b_n$ auch divergent

4.50 „Wurzelkriterium"

$\exists q,\ n \geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist absolut konvergent

$n \geq N: \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist divergent

4.51 Limes Form:

$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist absolut konvergent

$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist divergent

4.52 „Quotientenkriterium"

$\forall n : a_n \neq 0$

$\exists q, n \geq N: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \Rightarrow \sum a_n$ ist absolut konvergent

$n \geq N: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \Rightarrow \sum a_n$ ist divergent

4.53 Limes Form

$\limsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Rightarrow$ absolut konvergent

$\limsup_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > \quad \Rightarrow$ divergent

4.56 Rechenoperationen von Reihen

konvergent + konvergent = konvergent

λ · konvergent = konvergent

absolut konvergent · absolut konvergent = absolut konvergent

Cauchy Produkt — alleinige Konvergenz reicht nicht aus

= Grenzwert a · Grenzwert b

Seite 170

4.59 Eigenschaft von Potenzreihen

Potenzreihe: $\sum a_n (x - x_0)^n$

„Koeffizienten" „Anschlussstelle"

$0 \leq R \leq \infty$ existiert sodass Reihe für $\forall x \in \mathbb{C}$

wenn $|x - x_0| < R \longrightarrow$ absolut konvergent

wenn $|x - x_0| > R \longrightarrow$ divergent

Konvergenzbereich dann 2D in Gauß'scher Zahlenebene:

Kreis mit Konvergenzradius $R = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Konvergenz-Radius von Potenzreihen:

wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ (Divergenz nach Wurzelkriterium)

$R = 0$, Reihe konvergiert nur mit $x = 0$

wenn $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ (Konvergenz nach Wurzelkriterium)

$R = \infty$

R kann auch mit Quotientenkriterium berechnet werden

Sätze elementare Funktionen

4.66 Strenge Monotonie

Streng monoton wachsend / fallend in einem Intervall bedeutet Funktion ist dort bijektiv und Umkehrbar $f^{-1}(x)$

Umkehrung ist auch bijektiv

4.67 $f(x) = x^n$ ist bijektiv für $n \in \mathbb{N}^*$

4.68 $x < y \iff x^r < y^r$ wenn $r \in \mathbb{Q}^+$

4.70 Wenn $a_n \to 0$ und $x > 0$

$$\lim_{n \to \infty} x^{a_n} = 1$$

4.71 Wenn $\alpha = \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n$ wobei a_n Dezimalentwicklung nach α ist

$$\lim_{n \to \infty} x^{b_n} = \underbrace{\lim_{n \to \infty} x^{b_n - a_n}}_{= 1} \cdot \lim_{n \to \infty} x^{a_n} = \lim_{n \to \infty} x^{a_n}$$

<< Unvollständig >>

Qualitative Beschreibung von Folgen

Monotonie und Beschränktheit

Monotonie

monoton fallend $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

streng monoton fallend $a_{n+1} < a_n$

monoton steigend

streng monoton steigend

Beispiel:

$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ streng monoton fallend da

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$

Beschränktheit

$a_n \leq S$ für $\forall n \in \mathbb{N}$: obere Schranke

$a_n \geq 1$ für $\forall n \in \mathbb{N}$: untere Schranke

„nach oben beschränkt"

„nach unten beschränkt"

Supremum : kleinste obere Schranke

Infimum : größte untere Schranke

sup a_n: S_0 erfüllt

- $a_n \leq S_0 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$
- $S_0 \leq S$ (kleinste Schranke)

wenn unbeschränkt:

$\sup a_n = \infty$

$\inf a_n = -\infty$

Jede reele Zahl läss sich approximieren

$\sup M = \pi$

$\inf M = 3$

3

3,1

3,14

3,141

⋮

Wenn Supremum und Infimum in der Menge enthalten sind:

- Maximum und Minimum

Satz: „Vollständigkeitssatz für die reelen Zahlen"

Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum und ein Infimum

Satz: Jede Konvergente Folge ist beschränkt

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$\varepsilon > 0$

fast alle a_n liegen in $U_\varepsilon(a)$ außer Menge M

$M \notin U_\varepsilon(a)$

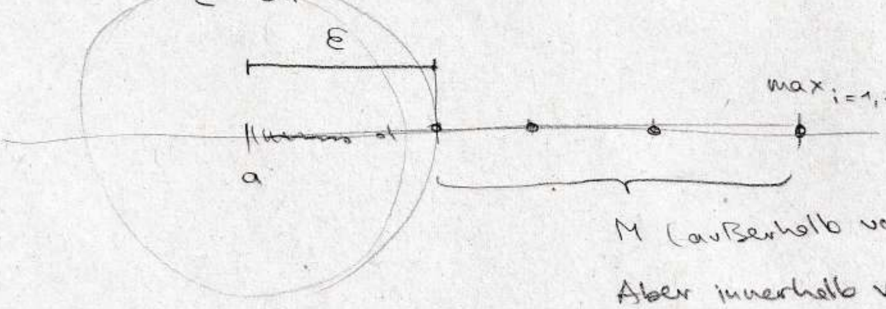
$M = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4} \dots a_{n_k}\}$

Sei $\bar{\varepsilon} > \max_{i=1,\dots,k} |a - a_{n_i}|$

$\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$

$a = \inf a_n$

$\bar{\varepsilon} = \sup a_n$



M (außerhalb von $U_\varepsilon(a)$)

Aber innerhalb von $U_{\bar{\varepsilon}}(a)$

Dadurch bildet $\bar{\varepsilon}$ eine Schranke.

Hauptsatz über monotone Folgen

Monotone Folgen sind beschränkt wenn sie konvergent sind (siehe oben)

Und umgekehrt auch:

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$

$a = \sup a_n$

$\varepsilon > 0$ wobei $a - \varepsilon$ keine obere Schranke ist sondern $a + \varepsilon$

Es gibt ein $N(\varepsilon)$ sodass $a_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon$

Aufgrund der Monotonie muss:

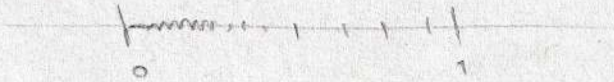
- $a_n > a - \varepsilon$ (streng monoton steigend)

für alle $n > N(\varepsilon)$

Beispiel 4,5)

a)

$$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)$$



$\varepsilon > 0$

Es gilt $\underbrace{0 < a_n < \varepsilon}_{\text{Umgebung beinhaltet alle Werte}}$ wenn $\underbrace{n > N(\varepsilon)}_{\text{alle Werte größer als Umgebungsindex}}$

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor$$

Beispiel:
Alle Werte in Umgebung $\varepsilon = 0{,}25$ haben einen Index größer als $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{0{,}25}} \right\rfloor = 2$

$$a_2 = \frac{1}{4}$$

b) $a_n = (-1)^n$

2 Häufungswerte: -1 und 1

Folge besitzt keinen Grenzwert

c) $a_n = (n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

(uneigentlich Konvergent)

Beispiel 4.10)

$\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ $\quad a_1 = 1 =$ supremum

es gilt $a_n \leq 1$ für $\forall\, n \geq 1$

$a_n \leq S$

$0 =$ Infimum $=$ Grenzwert

0 ist aber selbst kein Glied der Folge

Beispiel 4.13)

$a_n = a_0 + nd$

wenn $d = 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$$

wenn $d \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

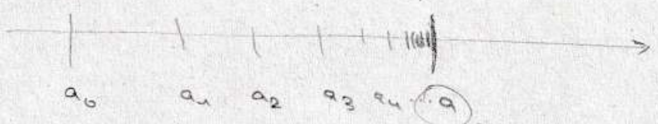
abhängig von $\pm d$

Konvergent

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ bzw $a_n \longrightarrow a$

$(a_n)_{n\geq 0}$ ist konvergent

hat Grenzwert a



→ wenn $a = 0$ dann „Nullfolge"

Divergent

$(a_n)_{n\geq 0}$ ist divergent

hat keinen Grenzwert a

Uneigentlich Konvergent

$(a_n)_{n\geq 0}$ Glieder werden beliebig groß.

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

uneigentlicher Grenzwert

$\left.\begin{array}{l} \forall K > 0 \quad \exists N(K) \in \mathbb{N} \\ \forall n > N(K) : a_n > K \end{array}\right\}$ $K \mathrel{\hat{=}} \varepsilon$

Für alle Umgebungen K
die größer als 0 sind
und den kleinsten Folgenindex N(K) beinhalten gilt dass
alle folgenden Folgenglieder nicht mehr in der Umgebung
sind.

Häufungspunkt /
Häufungswert von $(a_n)_{n\geq 0}$

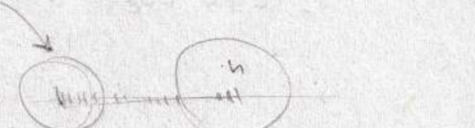
Gegensatz von Grenzwert

($\exists$ uneigentlichen Häufungswert)

größter Häufungswert = „limes superior" $\limsup_{n\to\infty} a_n$ Obergrenze

kleinster Häufungswert = „limes inferior" $\liminf_{n\to\infty} a_n$ Untergrenze

der Folgenglieder außerhalb
der Umgebung ε kann endlich oder unendlich sein!
(nur bei Häufungswert, nicht
Grenzwert)



Interessant:

Jeder Grenzwert ist ein Häufungswert
aber nicht jeder Häufungswert ist ein
Grenzwert.

→ Im Grenzwert liegen fast alle Glieder von a_n

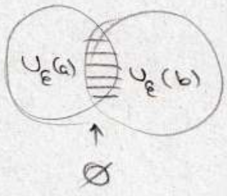
→ Im Häufungswert liegen ∞ viele aber nicht fast alle Glieder von a_n

Warum sind Häufungswerte ≠ Grenzwerte?

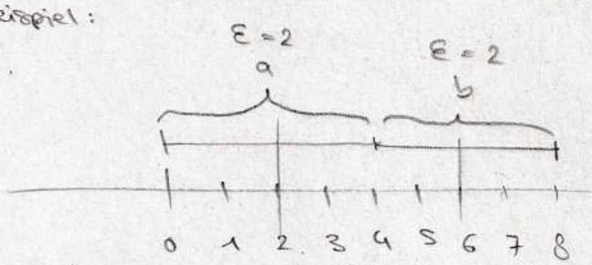
a, b Häufungswerte

$\varepsilon < \frac{1}{2}|a-b|$

$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$



Beispiel:



keine Gemeinsamkeit zwischen $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$

$a = 2$

$b = 6$

$\frac{1}{2}|a-b| = 2$

Conclusion:

Es können nicht fast alle Glieder sowohl in $U_\varepsilon(a)$ als auch in $U_\varepsilon(b)$ liegen.

Der Grenzwert ist immer eindeutig. (In jeder Umgebung liegen fast alle Werte)

Wenn $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergent ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underbrace{\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n}_{\text{Es kann nur einen Häufungspunkt geben.}}$$

Panholzer, Kapitel 4: Folgen, Reihen und Funktionen

Folgen Reeler Zahlen

Erlaubte Abweichung:

max 10^{-m}

für $n \geq m$

$a_0 = 3$

$a_1 = 3,1$

$a_2 = 3,14$

$a_3 = 3,141$

$a_4 = 3,1415$

$a_5 = 3,14159$

$a_6 = 3,141592$

$\vdots$

$a_n = \pi$ bis zur n-ten Nachkommastelle

→ „Approximation"

$< |a_n - \pi|$

Definition „Reele Folge": $a_n \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$

$a_0, a_1, a_2 \ldots$

$(a_n)\ n \geq 0$

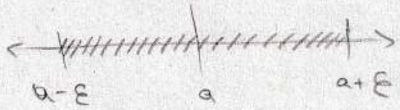
$a: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \quad a(n) = a_n$ ← Folgeglied, ← Index

Definition „Fast alle"

Etwas gilt für fast alle $n \in \mathbb{N}$ wenn gültig für alle aber ungültig für endlich viele

Definition „Umgebung"

$$U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon\, ; a+\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \varepsilon \}$$



Definition „Grenzwert"/„Limes"

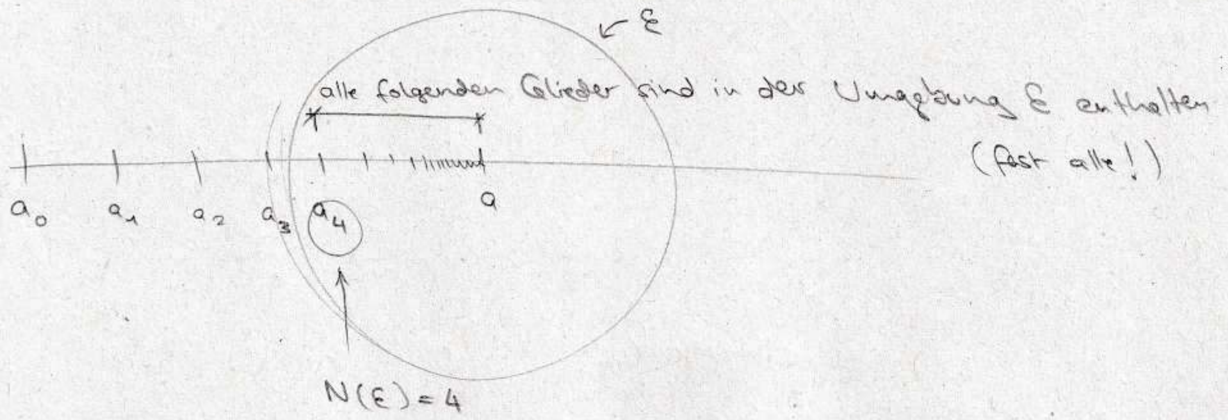
$\boxed{a}$ ist der Grenzwert der Folge $(a_n)\ n \geq 0$ falls in jeder ε-Umgebung (U_ε) von $\boxed{a}$ fast alle Folgeglieder a_n liegen

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \\ \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon \end{array}\right\} \lim_{n \to \infty} a_n = a$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

kleinster Index in der Umgebung ε von Folge a_n

$\forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$



$\rightarrow U_\varepsilon$ sollte möglichst klein sein!

Folgen, Reihen und Funktionen

Die Idee des Grenzwertes

Beispiel

$a_0 = 3$

$a_1 = 3,1$

$a_2 = 3,14$

$a_3 = 3,141$

$a_4 = 3,1415$

$a_5 = 3,14159$

$a_n =$ Dezimalentwicklung von π

Je größer n desto kleiner $|a_n - \pi|$

Wenn die erlaubte Abweichung $\underbrace{10^{-m}}_{\frac{1}{10^m}}$ so muss $n \geq m$

wenn $m = 3$

$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

$a_n \to a_3$

$a_3 = 3,141$ ✓

Definition Folge

$a_0, a_1, a_2, \dots \quad (a_n)_{n \geq 0}$

$a: \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R} \quad a(n) = a_n$ ← Folgenglied, ← Index

Beispiele:

$a_n = \frac{1}{n^2}$

$a_n = 2$

arithmetische Folge $a_n = a_0 + dn$. $\quad 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

geometrische Folge $a_n = a_0 q^n \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = q \quad 1, 3, 9, 27, 81, \dots$

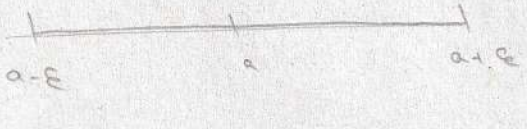
rekursive Folge $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$

Definition „fast alle"

$n \in \mathbb{N}$ trifft auf alle bis auf einer endlichen Menge zu.

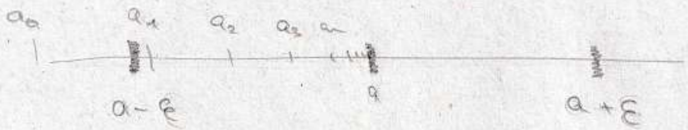
Definition Umgebung $U_\varepsilon(a)$

$U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon ; a + \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \varepsilon \}$



Definition Grenzwert / Limes

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > N(\varepsilon): |a_n - a| < \varepsilon$



$N(\varepsilon) = 1$

$N(\varepsilon)$

Index N von Abstand $\varepsilon > 0$

Ab $N(\varepsilon)$ sind alle Folgenglieder in der Umgebung ε

Egal wie klein man ε wählt gibt es immer ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sodass für alle unendlich vielen Folgengliedern $|a_n - a| < \varepsilon$

Wenn man eine Umgebung definieren kann außerhalb der keine ∞ vielen Folgenglieder sind = Grenzwert

konvergent

$\exists$ Grenzwert a

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \qquad a_n \longmapsto a$

wenn $a = 0$ dann „Nullfolge"

divergent

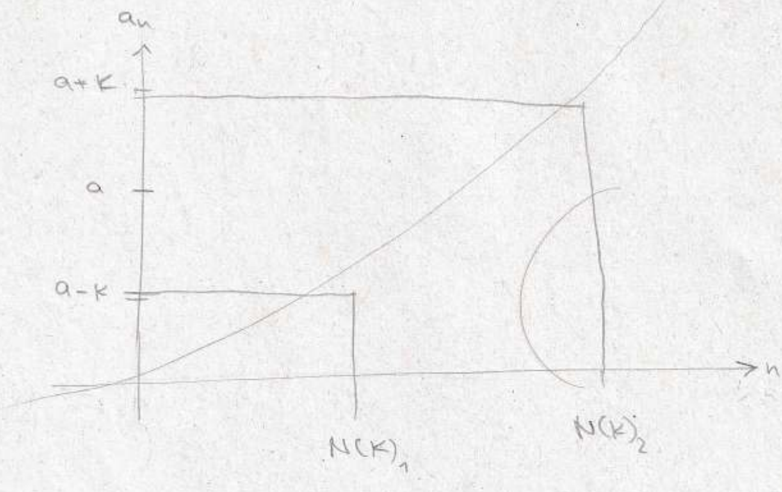
$\nexists$ Grenzwert a

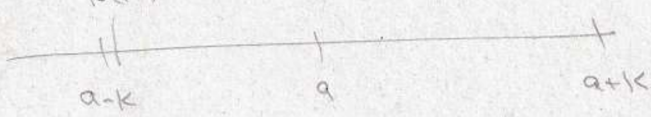
uneigentlich konvergent

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$ „uneigentlicher Grenzwert"

$\underbrace{\forall K > 0}_{\text{Umgebung}} \quad \exists N(K) \in \mathbb{N}$

$\forall n > N(K): a_n > K$





Kein Wert kann als Grenzwert dienen da Werte $\to \infty$

Definition Häufungspunkt / Häufungswert

Häufungswert a (uneigentlich wenn $= \pm\infty$)

Beliebig viele müssen in $U_\varepsilon(a)$ sein (es können unendlich viele außerhalb sein)

größter Häufungspunkt lim sup

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

kleinster Häufungspunkt lim inf

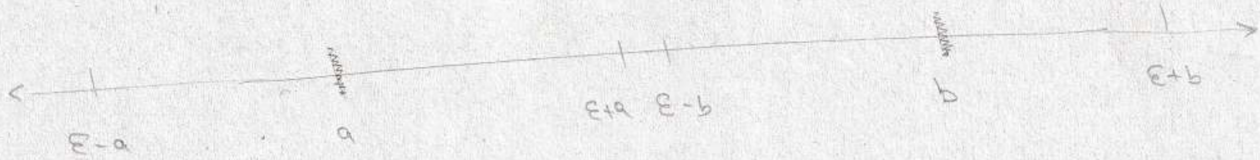
$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Grenzwerte sind Häufungspunkte
Häufungspunkte aber sind nicht Grenzwerte

Grenzwerte sind <u>eindeutig</u>

Beweis:

angenommen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \wedge b \quad \varepsilon \leq \frac{1}{2}|a-b|$



$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$

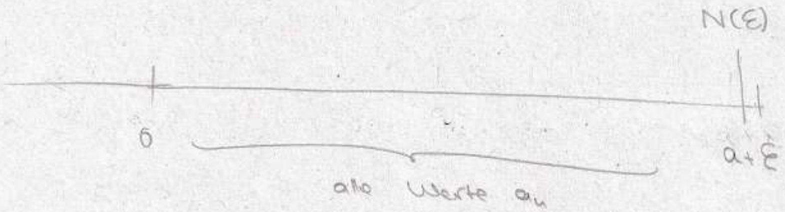
Daher können nicht alle Werte in a und b gleichzeitig sein

Beispiele

a) $a_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\right)$

$\varepsilon > 0$

$0 < a_n < \varepsilon$



$n > N(\varepsilon)$

$N(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rfloor$

$a_1 = 1$

$a_2 = \frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{9}$

$a_4 = \frac{1}{16}$

Wir suchen den kleinsten / größten Wert in den Schranken von ε

Angenommen $\varepsilon = \frac{1}{4}$

$N(\frac{1}{4}) = \lfloor \frac{1}{\sqrt{0{,}25}} \rfloor = \lfloor \frac{1}{0{,}5} \rfloor = \lfloor 2 \rfloor$

$a_2 \in U_\varepsilon(\frac{1}{4})$ ✓

weil $a_2 = \frac{1}{4}$

b) $a_n = (-1)^n$

Häufungswerte: $\{1, -1\}$

$U_\varepsilon(1)$ und $U_\varepsilon(-1)$ $\longrightarrow$ kein Grenzwert

c) $a_n = (n^2)$

$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$

Monotonie

monoton fallend $a_{n+1} \leq a_n$ streng: $<$

monoton steigend $a_{n+1} \geq a_n$ streng: $>$

Beispiel

$a_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ streng monoton fallend

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

Beschränktheit

obere Schranke – supremum

nach oben beschränkt mit Schranke S: $\forall n \; a_n \leq S$

für $\sup a_n$ gilt:

$\exists S_0 \in \mathbb{R}$ sodass $a_n \leq S_0$ für $\forall n \in \mathbb{N}$ und
$a_n \leq S$ für alle $S_0 \leq S$.

kleinste obere Schranke

untere Schranke – infinum

$\exists S_0 \in \mathbb{R}$ sodass $a_n \geq S_0$ und $S_0 \geq S$.

müssen nicht Folgenglieder sein

wenn enthalten

max

min

Unbeschränkt

$\sup a_n = \infty$ bzw.

$\inf a_n = -\infty$

Vollständigkeitssatz für reele Zahlen

Jede nicht leere, beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infinum / Supremum.
bzw reele Folge

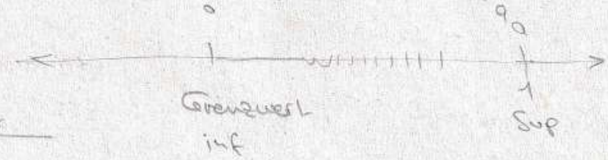
Beispiel

$a_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$

$\sup a_n = 1$

$\inf a_n = 0 \rightarrow$ Grenzwert

kein Glied der Folge



Beispiel

$I = (0;1)$ $\inf = 0 \notin I$

$\sup = 1 \notin I$

Jede konvergente Folge ist beschränkt

Beweis

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \varepsilon > 0 \Longrightarrow$ fast alle $a_n \in U_\varepsilon(a)$

$\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots a_{nk}\} \notin U_\varepsilon(a)$

Vereinfacht:
wenn ε groß genug ist
kann kein Glied
außerhalb liegen

Sei $\bar{\varepsilon} > \max_{i=1,\dots,k} |a - a_{ni}|$

dann gilt $\bar{\varepsilon} \geq \varepsilon$

Hauptsatz über monotone Folgen

konvergent monotone Folge $\Leftrightarrow$ beschränkt monotone Folge

$(a_n)_{n\geq 0}$ Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit

Beweis für Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz

Angenommen $\sup a_n = a \quad \varepsilon > 0$

Da $a-\varepsilon$ kein Supremum ist $\exists N(\varepsilon)$ mit $\underbrace{a_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon}$

auf Grund der Monotonie
müssen alle $a_n > a - \varepsilon$
für $n > N(\varepsilon)$ gelten

daher liegen fast alle a_n
in $U_\varepsilon(a)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Beispiel

Arithmetische Folge $\rightarrow$ konstante Folge

$a_n = a_0 + nd \qquad d = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$

wenn $d \neq 0, \pm d$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Rechnen mit Grenzwerten

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b$

Addition / Subtraktion $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

Multiplikation $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = ab$ auch $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Division $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$

Beispiel

Uneigentliche Konvergenz, unlösbarkeit

$a_n = n \qquad a_n \to \infty$

$b_n = n + c_n,\ c_n \geq 0 \qquad b_n \to ?$ abhängig von c_n

> Subtraktion

$b_n - a_n = c_n \qquad b_n = n + b_n - a_n$ } keine Aussagen möglich

Beispiel

$\frac{n}{n^2} \to 0 \quad \frac{n^2}{n} \to \infty \quad \frac{2n}{n} \to 2$

„Unbestimmte Formen"

$\infty - \infty = ? \qquad 1^{\infty} = ?$

$\frac{\infty}{\infty} = ? \qquad \infty^0 = ?$

$\frac{0}{0} = ? \qquad 0^0 = ?$

Konventionen

$a_n \to \infty$

$b_n \to b$

Addition $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ falls $b \in \mathbb{R}$, $b = \infty$

Multiplikation $\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \begin{cases} \infty & \text{falls } \lambda > 0 \\ -\infty & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty \quad b > 0$

Division $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad b \in \mathbb{R}$

Beispiel

$$a_n = \frac{n^2+n-1}{3n^2-11} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{11}{n^2}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{11}{n^2}}$$

herausheben der höchsten Potenz, kürzen

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3-\frac{11}{n^2}} = \frac{1+0-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

Beispiel

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} 0 : |q|<1 \\ 1 : q=1 \\ \infty : q>1 \end{cases}$$

BSP 4.18

Beweis:

Sei $q>1$ und $q=1+p$.

$$q^n = (1+p)^n = 1+np+\binom{n}{2}p^2+\ldots+\binom{n}{n}p^n \geq 1+np \to \infty$$

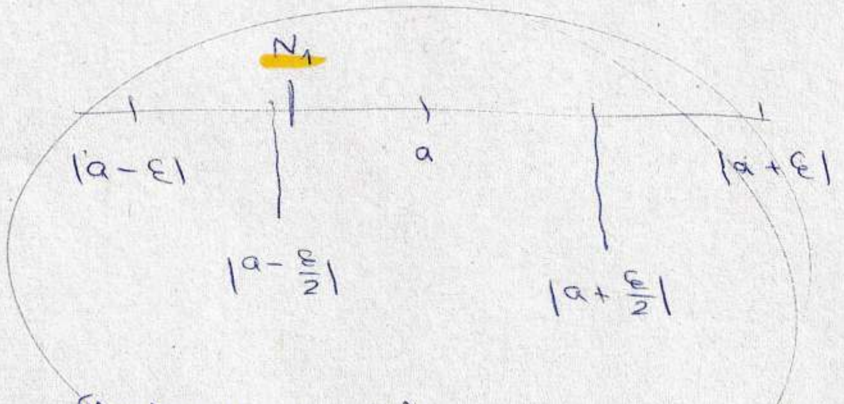
Beweis von Satz 4.14 i) von Seite 159

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$a_n \to a$ für ein beliebiges ε (dynamischer Wert der immer kleiner wird)

$b_n \to b$ $\varepsilon > 0$ für a_n und b_n

Wir nehmen $N(\frac{\varepsilon}{2}) = N_1$ und N_2



(Analog N_2 für b)

$\forall\, n > N_1 : |a_n - a| < \varepsilon/2$

$\underbrace{\forall\, n > N_2}\ : \underbrace{|b_n - b| < \varepsilon/2}$

addiert

$$\forall\, n > \max(N_1,N_2) : \underbrace{|a_n \pm b_n - (a \pm b)|}_{\text{Was zu beweisen galt}} \leq \overbrace{|a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon}$$

Was zu beweisen galt

Die Diferenz zum Grenzwert ist gemeinsam kleiner als ε

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

BSP 4.18

Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

$n=0 \quad 1 \geq 1$

$n=1 \quad (1+x) \geq 1+x$

$n=2 \quad (1+x)^2 \geq 1+2x$

$1^2+2x+x^2 \geq 1+2x$

$n=3 \quad (1+x)^3 \geq 1+3x$

$\underbrace{(1+x)^2}_{\geq 1+2x}(1+x) \geq (1+2x)(1+x)$

$1+3x+2x^2 \geq 1+3x$

Vollständige Induktion

$p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$(1+x)^n > 1+nx \quad | \cdot (1+x)$

$(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$

$1+(n+1)x+nx^2 > 1(n+1)x$ ✓

Behauptung

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q|<1 \\ 1 & \text{falls } q=1 \\ \infty & \text{falls } q>1 \end{cases}$$

Beweis

angenommen $q>1$

$q=1+p$ denn $q^n=(1+p)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot p^k \geq 1+np \to \infty$

Binomischer Lehrsatz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

angenommen $0<q<1$

$\frac{1}{q}>1$

$\frac{1}{q^n}\to\infty$ aber $q^n\to 0$ weil wenn

$a_n=\frac{1}{q^n}$ und $b_n=1 \quad q^n=\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{\frac{1}{q^n}}\to 0$

Bsp 4.19)

Uneigentlich konvergente Folgen und Potenzbildung

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad a_n \to 1$

$b_n = n$ $\quad b_n \to \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} \neq 1^\infty \neq 1$

Binomischer Lehrsatz

$$a_n^{b_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \geq \underbrace{1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n}}$$

$$1 + \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$1 + \frac{n}{n} =$$

$$1+1 = 2$$

also:

$a_n^{b_n} \geq 2$ und kann nicht 1 sein

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist eine monoton wachsende Folge! (eulersche Zahl)

Beweis:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)}^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > \ldots 1$$

$$\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n} =$$

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2+n} = \ldots = 1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Daraus folgt, dass $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ streng monoton wächst

und (siehe Seite 161) die Obergrenze 3 hat

Konvergenzuntersuchungen

Hauptsatz über monotone Folgen: „Konvergenzkriterium“

monotone Folge: Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz

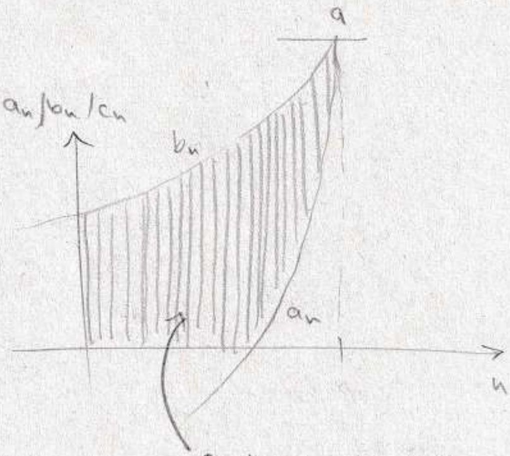
Bedingungen für Konvergenz:

Sandwich-Theorem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \qquad a_n \leq c_n \leq b_n$$

auch

$\Rightarrow c_n \to a$



c_n kann nur $\to a$ konvergieren

Beweis:

$\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(a)$ falls $n > N_1$

$b_n \in U_\varepsilon(a)$ falls $n > N_2$

$\Rightarrow c_n \in U_\varepsilon(a)$ falls $n > \max(N_1, N_2)$

c_n <u>muss</u> mindestens unter der höheren Folge liegen

Beispiel:

$\alpha > 0$

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$\frac{1}{n^\alpha} \to 0 \qquad n^\alpha \to \infty$

Beweis:

es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$

daraus folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$

Teilfolgen

$n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ natürliche Zahlen

$(a_n)_{n \geq 0}$

$(a_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$ Teilfolge von a_n

Beispiel

$a_n = n^2$ $\quad a_n \subseteq b_n$

$b_n = n$ $\quad a_n$ ist eine Teilfolge von b_n

Beispiel

$a_n = (-1)^n$ $\quad b_n \subseteq a_n$

$b_n = 1$

divergent

konvergent

konvergierende Teilfolgen

a = Häufungspunkt von a_n

$\exists$ Teilfolge die gegen a konvergiert $\Longrightarrow$ Wir lassen einfach alle Werte die nicht gegen den Häufungspunkt konvergieren aus! Dann ist es ein Grenzwert

Beweis:

davon wählen wir

$a_{n_0} \in U_{\varepsilon_0}$ $\quad \varepsilon_0 = 1$

$a_{n_1} \in U_{\varepsilon_1}$ $\quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}$

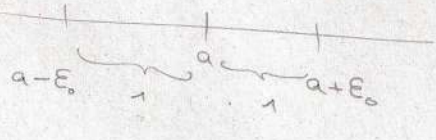
$a_{n_2} \in U_{\varepsilon_2}$ $\quad \varepsilon_2 = \frac{1}{4}$

Es gibt in $U_{\varepsilon_0}(a)$ $(\varepsilon_0 = 1)$ unendlich viele Folgenglieder von a

$\varepsilon_n = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$

„monoton fallende Nullfolge" konvergiert gegen 0

$a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_k}$

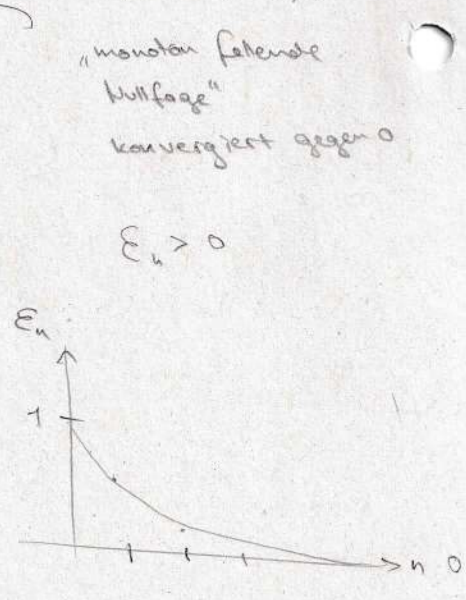


$\varepsilon_n > 0$

$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}$ $\quad \varepsilon_k = \frac{1}{k}$

$\Downarrow$

$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a und ist eine Teilfolge



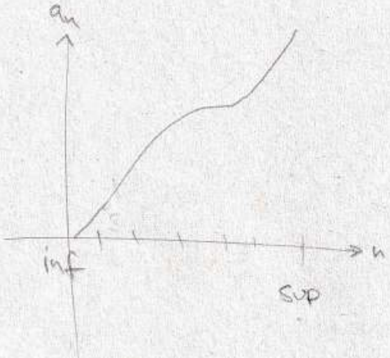
$\varepsilon_0 \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_k$

Satz von Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ enthält einen Häufungspunkt, also eine konvergente Teilfolge

Nach Satz 4.12:

Hauptsatz über monotone Folgen

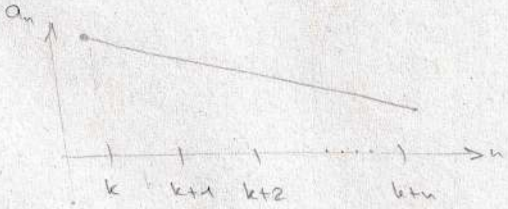


„Wenn eine <u>monoton</u> steigende / fallende Folge nach oben und unten beschränkt ist, ist sie konvergent"

↓

Nachweis für Monotonie in einer Teilfolge:

Menge $M = \{ k \in \mathbb{N} \mid \forall m > k : a_m < a_k \}$



$m > k$
$a_m < a_k$

wenn $k \in M$ existiert dann k = Supremum und

a) $|M|$ = unendlich

$(a_k)_{k\in M}$ = monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n\geq 0}$

mit $k_1, k_2 \in M$
$k_1 < k_2$
$a_{k_1} > a_{k_2}$

b) $|M|$ = endlich

$(a_k)_{k\in M} \neq$ Teilfolge sondern nur ein kleiner monoton fallender Abschnitt

→ monoton wachsende Folge kreieren:

M = beschränkt

Außerhalb der Menge gibt es $n_1 > k$ für $\forall k \in M$

wobei $a_{n_1} > a_{n_k}$ weil es sonst in der Menge enthalten wäre!

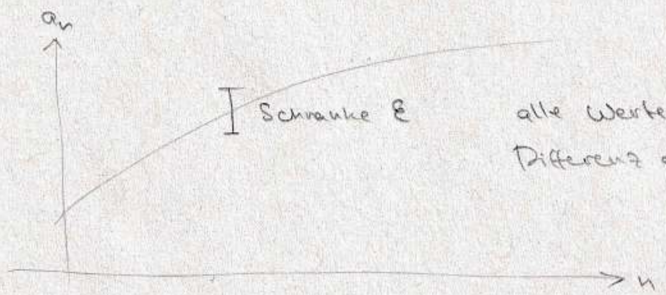
$\exists\, a_{n_2} \geq a_{n_1}$
$n_2 > n_1$ … > monoton wachsende Teilfolge

Satz 4,29

Cauchy-Kriterum für Folgen

Cauchy-Folgen sind immer konvergente Folgen

Für $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon)$ sodass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $\forall n,m > N(\varepsilon)$



alle Werte ab $N(\varepsilon)$ haben eine kleinere Differenz als Schrake ε

Beispielsweise:

$\varepsilon = 0{,}5$ $\quad \exists N(\varepsilon) = N(0{,}5)$

$\forall n,m > N(\varepsilon) = 7$

Für 2 beliebige Folgenglieder $(a_n)_{n>7}$ und $(a_m)_{m>7}$

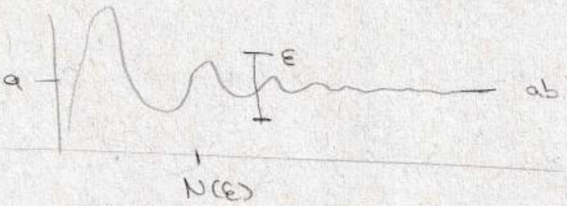
gilt: $|a_n - a_m| < 0{,}5$

Zuerst setzt man eine Schranke fest.
Danach findet man $N(\varepsilon)$ heraus ab der diese Regel gilt.

Beweis für Cauchy-Folge

Definition Cauchy-Folge:

$\varepsilon > 0$: $\exists N(\varepsilon)$ sodass für alle $n, m > N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$



ab Index $N(\varepsilon)$ sind alle $|a_n - a_m| < \varepsilon$

Beweis: Konvergente Folge ist Cauchy-Folge

$(a_n)_{n \geq 0} \longrightarrow a$

$\varepsilon > 0$: $\exists N(\varepsilon)$ sodass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$

Wenn nun aber:

$n, m > N(\varepsilon)$ dann gilt $|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_n - a)| \leq \underbrace{|a_n - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon}_{\text{Dreiecks-Ungleichung}}$

algebraische Umformung
$a - a = 0$

Die gemeinsame Differenz muss kleiner als 2ε sein weil vorher die Schranke nur für $|a_n - a|$ fest stand.

$\square$

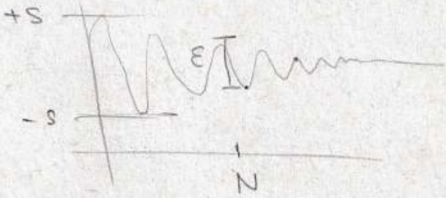
Conclusion: Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Beweis: Cauchy-Folge ist konvergente Folge

$\varepsilon > 0$ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ gilt für alle $n,m > N(\varepsilon)$

Dann bedeutet das: $(a_n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt

für $m > N = N(\varepsilon)$



$|a_m| - |a_{N+1}| \leq |a_m - a_{N+1}| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|a_m| \leq |a_{N+1}| + \varepsilon$

$\downarrow$

Die Folge $(|a_{N+1}|, |a_{N+2}|, \dots)$ ist durch $|a_{N+1}| + \varepsilon$ nach oben beschränkt

S sup kann auch davor liegen!

$+S = \max(|a_0|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + \varepsilon)$ obere Schranke von a_n

$-S = (-1) \cdot$ — " — untere Schranke von a_n

Nach Satz Bolzano Weierstraß:

$\exists$ Häufungspunkt a und Teilfolge mit Grenzwert

Wenn Teilfolge groß genug ist dann Cauchy-Folge = Konvergent

Der Begriff der unendlichen Reihe

unendliche Summe

$$S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_k$$

Folge der Reihenglieder

Die Folge $(S_n)_{n\geq 0}$ mit $S_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt **Folge der Partialsummen** der Reihe.

Summe = Grenzwert von Partialsumme
(kann divergent sein)

Satz:
Wenn $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert: $a_n \to 0$

Beweis:

$$\sum_{n\geq 0} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

Beispiel: Satz gilt nicht umgekehrt

harmonische Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

$(S_n)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend

$S_1 = 1$

$S_2 = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ $\boxed{S_{2n} \geq 1 + \frac{n}{2}}$ $\longrightarrow$ $1 + \frac{n}{2} \to \infty$

divergent

$S_3 = \frac{1}{3}$ $\quad n=1 \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$S_4 = \frac{1}{4}$ $\quad n=2 \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{2}{2}$

$\vdots$

$S_n = \frac{1}{n}$

geometrische Reihe

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$$

$$q S_n = q + q^2 + q^3 + \dots q^{n+1}$$

$$\underbrace{S_n - q S_n}_{(1-q)S_n} = 1 - q^{n+1}$$

wenn $q \neq 1$ (weil sonst division durch 0)

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Satz 4.35:

falls $S_n = \sum_{n\geq 0} a_n$ konvergiert

$\Rightarrow a_n \to 0$

Trifft hier zu:

$$a_n = \left|\frac{1}{p}\right|^n \to 0$$

q bestimmt Konvergenz

$|q| < 1$

$|q| = \left|\frac{1}{p}\right|$

$$S_n = \frac{1 - \left|\frac{1}{p}\right|^{n+1}}{1 - \left|\frac{1}{p}\right|} \longrightarrow \frac{1}{1 - \left|\frac{1}{p}\right|} = \frac{1}{1-q}$$

$$S_n = \sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$|q| > 1$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} = \frac{\cancel{q}(1 - q^n)}{\cancel{q}\left(\frac{1}{q} - 1\right)} =$$

$$= \frac{1 - q^n}{\frac{1}{q} - 1} \longrightarrow \frac{1 - \infty}{0 - 1}$$ divergent, kein Grenzwert

Beispiel (4.38)

$$\frac{1\,(k+1)}{k\cdot(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)}$$

$$\frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Reihe $\sum\limits_{n\geq 1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Partialsummenfolge $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

„Teleskopsumme"

Es tritt internes Auslöschen auf

Definition

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Die Summe einer unendlichen Reihe ist der Grenzwert von der Partialsumme S_n

$$a_n = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

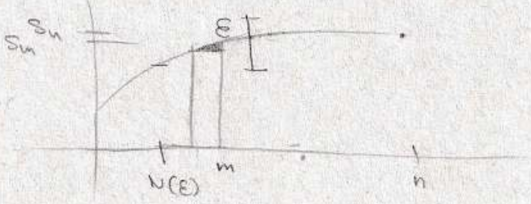
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$$

Konvergenzkriterien für Reihen

Satz 4.39: Cauchy-Kriterium für Reihen

Reihe $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ ist konvergent wenn für ein $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert sodass

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \text{ für } \forall\, m \geq n > N(\varepsilon)$$



$$\sum_{k=n}^{m} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots + a_n = s_m$$

n ist eine beliebige untere Schranke nach $N(\varepsilon)$ ab der alle Summen < Grenzwert von s_n sind

Satz 4.41: Konvergenz-Kriterium von Leibniz

Alternierende Reihe: $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ → monoton fallende Nullfolge

⇓

ist konvergent!

Beweis:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_n$$

letzter Wert ungerade $\quad s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1})$

gerade $\quad s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n})$

} Teilfolgen von s_n

s_{2n+1} ist eine monoton wachsende Folge, weil a_n monoton fällt

weil: $\underbrace{a_{2k}}_{\text{groß}} - \underbrace{a_{2k+1}}_{\text{klein}} \geq 0$

s_{2n} ist aus dem selben Grund eine monoton fallende Folge.

$$a_0 - (\underbrace{a_{2k+1}}_{\text{klein}} - \underbrace{a_{2k}}_{\text{groß}}) \leq 0$$

Wir wissen nun:

s_{2n+1} : monoton steigend
s_{2n} : monoton fallend

Weiters gilt:

$0 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq a_n \implies$ Beschränktheit

Und es gilt: Monotonie + Beschränktheit bedeutet es ist konvergent (Satz 4.12)

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n+1}) = a$$

$$\lim_{n\to\infty} (s_{2n}) = b$$

$$0 \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0$$

$$a = b = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad \square$$

Beispiel 4.42

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

$\frac{1}{n}$ ist eine monoton fallende Nullfolge und alternierend

$\Downarrow$

Diese Reihe ist konvergent

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

Wenn man aber nur den Betrag nimmt: $\left|(-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ dann divergiert die Reihe („Harmonische Reihe")

Definition

Wenn $\sum a_n$ konvergiert aber $\sum |a_n|$ nicht: bedingt konvergent

Wenn $\sum |a_n|$ konvergiert (dann $\sum a_n$ automatisch auch): absolut konvergent

Beweis (Satz 4.44)

Wenn $\sum a_n$ absolut konvergent ist folgt aus Cauchy-Kriterium

für ein bestimmtes $\varepsilon > 0$ $\exists N$ sodass $\forall m \geq n > N$:

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| = |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

Dreiecks-Ungleichung:

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$$

$\downarrow$

$$|a_n + a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon$$

was zu beweisen galt.

Riemann'scher Umordnungssatz

In einer absolut konvergenten Reihe hat die Umordnung der Summationsreihen-Folge keine Auswirkung auf Grenzwert

deshalb „absolut konvergente Reihe" = „unbedingt" konvergente Reihe

▷ „Eine bedingt konvergente Reihe lässt sich so umordnen, dass sie gegen eine beliebige Zahl konvergiert"

Majoranten-Kriterium (Konvergenzbeweis)

$\exists \sum a_n$ und $\sum b_n$ mit $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n.

Falls $\sum b_n$ konvergent ist, ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

$\sum b_n$ ist dann die „Majorante" von $\sum a_n$

Beweis

Anwendung Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N}$ sodass wenn $m \geq n > N$

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon$$

Also ist $\sum |a_n|$ absolut konvergent.

Minoranten-Kriterium (Divergenz-Beweis)

$\exists \sum a_n$ und $\sum b_n$ so dass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n.

Wenn a_n divergent ist, ist auch b_n divergent.

Beispiel

$a_n = \frac{1}{n^2}$: monoton fallende Nullfolge

Nach Leibniz ist $\sum (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Um zu beweisen dass a_n absolut konvergent ist:

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ für $n \geq 2$ Abschätzung

Wir wissen, dass die Teleskopsumme

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

→ Also konvergiert auch $\frac{1}{n^2}$. (wir wissen aber nicht welcher Grenzwert)

$$\left(\text{Eigentlich: } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \right)$$

Wir wissen nun dass $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert ...

Wir wollen allgemeiner werden

$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ gilt für $\alpha \geq 2$ $\Longrightarrow$ also konvergiert $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \geq 2$

Bauart der „hyperharmonischen Reihe"

konvergent $\alpha > 1$

divergent $\alpha \leq 1$

Wurzelkriterium

Wenn $\exists\, q : \sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n

dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent

Wenn aber $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für $\forall n$

dann ist $\sum a_n$ divergent

Es ist wichtig dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ und nicht $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$

Beispiel:

Harmonische Reihe: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ erfüllt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$

(divergent)

weil $a_1 = 1$ und $\sqrt[1]{|a_1|} = 1$

Wichtig

Wenn $\sqrt[n]{n} \to 1$ dann überschreitet Folge die Schranke $q < 1$ aber erfüllt auch nicht $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$

Dann ist Wurzelkriterium nutzlos.

Beweis

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad |\,^n$

$|a_n| \leq q^n$ gültig für $n \geq N$

Majorante:

Geometrische Reihe $\sum q^n$ (konvergiert)

$(q < 1)$

$\rightarrow$ a_n ist absolut konvergent

Limes Form des Wurzelkriteriums

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Longrightarrow$ absol. konvergenz

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Longrightarrow$ divergenz

Quotientenkriterium

$a_n \neq 0$ für $\forall n$

$\exists q$ sodass: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für alle $n \geq N$ $\Rightarrow \sum a_n$ absolut konvergent

Wenn aber: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n $\Rightarrow \sum a_n$ divergent

Beweis

$\forall n \geq N: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$

$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \Rightarrow |a_n| \leq q \cdot \underbrace{|a_{n-1}|}_{|a_{n-1}| \leq q \cdot |a_{n-2}|}$

$|a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-2}|$

$|a_n| \leq q^3 \cdot |a_{n-3}|$

$\vdots$

$|a_n| \leq q^N \cdot |a_{n-N}|$

Umformuliert: (vollständige Induktion)

$|a_n| \leq q^{n-N} \cdot a_N$

Majorante

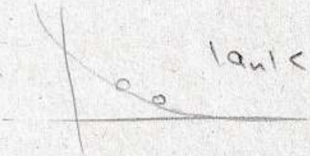
$\sum \underbrace{q^{n-N}}_{\substack{q<1 \\ \text{deshalb} \\ \text{konvergent}}} \cdot \underbrace{|a_N|}_{\text{fixe Zahl}}$

Wenn konvergente Reihe über a_n steht ist a_n auch konvergent.

Ziel der Konvergenzkriterien für Reihen ist es zu beweisen, daß

a_n eine monoton fallende konvergente Folge ist.

S_n 

a_n  $|a_n| < |a_{n+1}|$. $\Longrightarrow$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ gibt Auskunft über Monotonie

---

Fortsetzung des Beweises:

Wenn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle n und $\sum a_n$ divergiert dann

ist es nur möglich wenn $|a_n|$ ab $n \geq N$ monoton wachsend ist.

Wichtig!

Methode versagt wenn $\to 1$ (zB harmonische Reihe)

Lim. Form:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \quad \Rightarrow \text{absolute Konvergenz}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \Rightarrow \text{Divergenz}$$

Beispiele (Anwendung des Quotientenkriteriums)

$x \in \mathbb{R}: \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

a) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \underbrace{\frac{|x|}{n+1}}_{\text{Nullfolge}} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{q} < 1$ gültig für $n \geq N$, also konvergiert die Reihe

$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1^1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$

b) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{q} < 1 \quad n \geq 1$

Reihe ist konvergent

c) $a_{2n} = \frac{1}{4^n}$ (gerade Folgenglieder)

$a_{2n+1} = \frac{1}{4^{n-1}}$ (ungerade Folgenglieder)

Dann ist für gerade n: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 \longrightarrow = \limsup_{n \to \infty}$

für ungerade n: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{16} \longrightarrow = \liminf_{n \to \infty}$

Quotientenkriterium nutzlos

Versuch mit Wurzelkriterium:

$\sqrt[2n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{2} \qquad \sqrt[2n+1]{\frac{1}{4^{n-1}}} = \sqrt[2n+1]{\frac{2^3}{2^{2n+1}}} = \sqrt[2n+1]{8} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ wenn $n \to \infty$

also ist Reihe konvergent

Das Cauchyprodukt und Potenzreihen

Algebraische Operationen für Reihen weil Summe = S_n Grenzwert

$\exists \sum a_n \wedge \exists \sum b_n$

$\longrightarrow \sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$ Addition

$\sum (\lambda a_n) = \lambda \sum a_n$ Multiplikation mit Skalar

$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j =$ Multiplikation (Cauchy-Produkt)

$$(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \cdot (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$\Downarrow$

Multiplikation aber diagonal

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{\ell = \max(0, k-n)}^{\min(k,n)} a_\ell \cdot b_{k-\ell}$$

Satz

Wenn zwei Reihen absolut konvergieren dann ist ihr Cauchy-Produkt auch absolut konvergent, und es gilt:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) = \underbrace{a b}_{\text{Grenzwerte von } \sum a_n \text{ und } \sum b_n}$$

Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

„Entwicklungspunkt / Anschlussstelle"

„Koeffizienten"

Cauchy-Produkt via Definition

$$\sum a_n \cdot \sum b_n \longrightarrow \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right)$$

Cauchy-Produkt von Potenzreihen

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n \cdot \sum_{n \geq 0} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k \, b_{n-k} (x - x_0)^{n-k} \right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

Beispiele

Potenzreihe mit Anschlussstelle $x_0 = 0$
alle Koeffizienten $a_n = 1$ $\longrightarrow$ Geometrische Reihe

a)

$$\sum_{n\geq 0} 1\,(x-0)^n = \sum_{n\geq 0} x^n$$

$\nearrow$ konvergiert bei $|x|<1$

$\searrow$ divergiert bei $|x| \geq 1$

b) Binomische Reihe

$$\sum \binom{\alpha}{n} x^n \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Quotienten-Kriterium

$$a_n = \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \underline{\alpha \notin \mathbb{N}}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{\alpha}{n+1} x}{\binom{\alpha}{n} x} = \frac{(\alpha - n)\,x}{n+1} \longmapsto -x$$

konvergiert gegen $-x$

Wenn $|x| < 1$ konvergent
Wenn $|x| > 1$ divergent

$$\boxed{\text{„binomischer Lehrsatz"} \quad \sum \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha}$$

[Algo Dat]

Asymptotischer Vergleich von Folgen

Einsatz von Folgen in Laufzeit-Analyse $f(n) = a_n \longrightarrow$ Laufzeit

Operation = Elementarer Schritt (Addition, Multiplikation, Vergleich)

- Best-Case-Analyse a_n = minimale Operationsanzahl
- Average-Case-Analyse a_n = mittlere Operationsanzahl
- Worst-Case-Analyse a_n = maximale Operationsanzahl

Beispiel

Bubblesort

a_n = Anzahl der nötigen Vergleiche bei n Elementen

$$a_n = \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)$$

Was ist die „Größenordnung" vom average-Case?

Landau-Symbole

groß O:

für $n \to \infty$ $a_n \in O(b_n)$ wenn $\exists C > 0$. sodass

$$\left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq C \quad \text{für } n \geq N$$

Klein o:

für $n \to \infty$ $a_n \in o(b_n)$ wenn

$$\frac{a_n}{b_n} = 0$$

Asymptotische Gleichheit $\sim$:

für $n \to \infty$ $a_n \sim b_n$ wenn

$$\frac{a_n}{b_n} = 1$$

Omega Ω:

für $n \to \infty$ $a_n \in \Omega(b_n)$ wenn $\exists C > 0$ sodass

$$\left| \frac{b_n}{a_n} \right| \leq C \quad \text{für } n \geq N$$

(bzw wenn $b_n \in O(a_n)$)

Theta Θ:

für $n \to \infty$ $a_n \in \Theta(b_n)$ wenn $\exists C_1 > 0 \wedge \exists C_2 > 0$ sodass

$$C_1 |b_n| \leq |a_n| \leq C_2 |b_n| \quad \text{für } n \geq N$$

$\Rightarrow$ also zugleich $a_n \in O(b_n)$ und $b_n \in O(a_n)$

$$a_n \in \Theta(b_n) = b_n \in \Theta(a_n)$$

Beispiele

a) $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} \in O(n^2)$ da $\frac{n(n-1)}{2} < n^2$ $c=1$ kann gewählt werden

b) $\frac{n(n-1)}{2} \in O(n^3) \subseteq O(2^n)$ weil

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^3} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}\right) = 0$$

c) $\underbrace{\frac{n(n-1)}{2} \sim \frac{n^2}{2}}$ weil $\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{n^2}{2}} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$

Für große n
ist der relative Unterschied gering und ihr Verhalten gleich

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \underbrace{O(n)}_{\left(\frac{n}{2}\right)}$$

d) Stirling'sche Formel

$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}$ $\to$ Quantifizierung des Fehlers:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \underbrace{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$$

Partholzer, elementare Funktionen

Abbildung

$$f : \underbrace{x}_{\text{„Zielmenge"}} \longmapsto \underbrace{f(x)}_{\text{„Definitionsmenge"}}$$

Polynomfunktion

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Rationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad q(x) \neq 0 \quad \Big\} \text{ Polynome}$$

Monotonie

Intervall $I \subset D$ (Definitionsmenge)

$x_1, x_2 \in I$

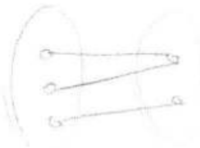
$x_1 < x_2$

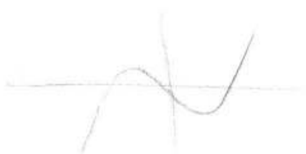
Streng monoton steigend $f(x_1) < f(x_2)$

streng monoton fallend $f(x_1) > f(x_2)$

Relationen

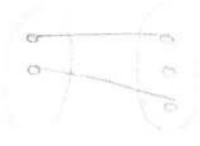
Surjektiv
„Rechtseindeutig"
f(x) besitzt mindestens ein x





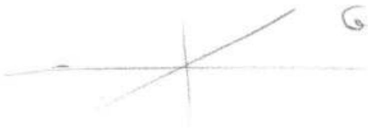
Grad 3

Injektiv
„Linkseindeutig"
f(x) besitzt höchstens ein x



f(x) nicht überall gedeckt

Bijektiv
„Eindeutig"
f(x) besitzt genau ein x



Grad 1

Satz

Wenn Funktion im Intervall streng monoton, dann bijektiv und umkehrbar

$f : I \to f(I)$

Umkehrung auch streng monoton wachsend / fallen wie f selbst!

Beweis:

f ist im Intervall streng mon wachsend : $\underbrace{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$

weil Bilder verschieden sind im Intervall : Injektiv

Wir wollen zeigen dass:

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$

das stimmt.

$f(x) = 1{,}5x$

$y = 1{,}5x$

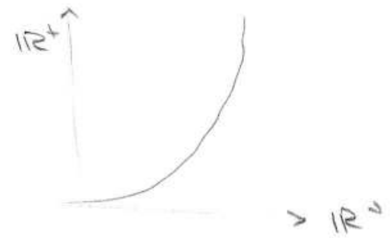
$x = 1{,}5y$

$\frac{x}{1{,}5} = y$

$\frac{2}{3}x = y$

Potenzen mit reellen Exponenten

Alle möglichen Potenzen mit natürlichen Zahlen



$f_n : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$

$f_n(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Satz:

$f_n(x)$ ist bijektiv

Beweis:

f_n ist streng monoton wachsend (siehe Ableitung) und daher injektiv.
Um nun Surjektivität zu beweisen muss man zeigen:

$$\forall y \in \mathbb{R}^+ : \exists x \text{ sodass gilt: } x^n = y$$

Man nehme Menge M

$$M = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n < y\}$$

alle x bei denen $f(x) < y$.

Supremum $M = f^{-1}(y) = x_S$

Es gilt

$$\forall x \in M : x^n < y < y+1 < (y+1)^n$$

$$x^n < (y+1)^n$$

Aufgrund von Monotonie für alle n nehmen wir 1

$$x < \boxed{y+1} \text{ obere Schranke}$$

Menge M hat Supremum sodass $\sup M = m$
Angenommen, Supremum ist auch Maximum von M und damit der größte Wert für den gilt $m^n < y$

Dann müsste $(m+\varepsilon)^n \geq y$ sein für $0 < \varepsilon < 1$. Beweis:

$$(m+\varepsilon)^n = m^n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \varepsilon^i < m^n + \boxed{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \cdot 1 <$$

$$(m+1)^n = \underbrace{m^n + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} m^{n-i} \cdot 1}$$

$$(m+1)^n < m^n + \varepsilon (m+1)^n$$

Wenn ε klein genug ist, dann $(m+\underbrace{\varepsilon}) ^n < m^n + \underbrace{\varepsilon(m+1)^n} < y$

Daraus würde folgen $m+\varepsilon \in M$ und das widerspricht $m = \sup M$

Würde gelten $m^n > y$

würde für $\varepsilon > 0$ folgen:

$$\underbrace{(m-\varepsilon)^n} = m^n\left(1-\frac{\varepsilon}{m}\right)^n \geq m^n\left(1-\frac{n}{m}\varepsilon\right) = \underbrace{m^n - \varepsilon n m^{n-1}}$$

(Bernoullische Ungleichung)

~~Fall 1: $x^n < y$~~

Fall 2: $x^n = y$

Fall 3 $x^n > y$

Muss ausgeschlossen werden

wenn ε klein genug ist, gilt

$m^n - \varepsilon n m^{n-1} > y$ also auch $(m-\varepsilon)^n > y$ wodurch $(m-\varepsilon) \in M$ wäre

Das ist ein Widerspruch.

Deshalb gilt eindeutig: $f_n(m) = m^n = y$

Weitere Folgerung:

Wenn eine Funktion bijektiv ist, muss sie auch eine Umkehrfunktion haben.

$f_n^{-1}(x)$ $\qquad f_n^{-1}: \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R}^+$

Potentieren mit Rationalen Zahlen

$$x^{\frac{1}{n}} = f_n^{-1}(x) \qquad x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

Rationale Potenzen und Rechenregeln

$x^r x^s = x^{r+s}$ $\qquad$ $x < y \Rightarrow x^r < y^r$

$x^r : x^s = x^{r-s}$ $\qquad$ $r < s \begin{cases} x > 1 & x^r < x^s \\ x < 1 & x^r > x^s \end{cases}$

$(x^r)^s = x^{r \cdot s}$

$(xy)^r = x^r y^r$

Reelle Potenzen

Erweiterung auf Irrationale Zahlen

$\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich mit Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ approximieren (Dezimalentwicklung)

$a_n \to \alpha$ (monoton wachsend)

Angenommen $x \in \mathbb{R}$ $x > 1$

$r < s, \; x^r < x^s \Rightarrow x^{a_n} < x^{\alpha}$ obere Schranke

also ist x^{a_n} konvergent

$x^{a_n} \mapsto x^{\alpha}$

Satz

Wenn $(a_n)_{n \geq 0}$ Nullfolge rationaler Zahlen ist und $x > 0, x \in \mathbb{R}$

dann $\lim\limits_{n \to \infty} x^{a_n} = 1$ $\quad$ (weil $\lim\limits_{n \to \infty} x^{a_n} = x^{\lim_{n \to \infty} a_n} = x^0 = 1$)

Beweis

Angenommen $x < 1$ und $\frac{1}{x} > 1 \Rightarrow x^{a_n} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a_n}$ -> weiterhin eine Nullfolge

Deshalb verallgemeinern wir $x > 1$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1} = x$

Angenommen $n > x$

$$\underbrace{n^{\frac{1}{n}}} > x^{\frac{1}{n}} > \underbrace{1^{\frac{1}{n}}} = 1$$

konvergieren gegen 1, deshalb nach Sandwich-Theorem $x^{\frac{1}{n}} \to 1$

$x^{-\frac{1}{n}} \to 1$

Angenommen $\varepsilon > 0$

$m \in \mathbb{N}$ mit $1 - \varepsilon < x^{-\frac{1}{m}} < 1 < x^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$

Da $|a_n| \to 0$ $\quad |a_n| < \frac{1}{m}$ $\qquad 1 - \varepsilon < x^{|a_n|} < x^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$

Daraus folgt: $1 - \varepsilon < x^{a_n} < 1 + \varepsilon$

(Folgerung nächste Seite)

Satz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{dann für } \forall x > 0 \quad \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{b_n}$$

Beweis

$a_n \to \alpha$ (Approximierende Folge)
$b_n \to \alpha$

$\Big\}\ a_n - b_n = 0$ (Nullfolge zugleich)

$$\lim_{n\to\infty} x^{a_n - b_n} = 1$$

weil $b_n - a_n + a_n = b_n$
ergibt es auch b_n

$$\leftarrow \lim_{n\to\infty} x^{b_n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} x^{b_n - a_n}}_{=1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^{a_n} = \lim_{n\to\infty} x^{a_n}$$

Daraus folgt:

wenn $a_n \to \alpha$

$x^{a_n} \to x^{\alpha}$

Exponentialfunktion und Logarithmus

$\exp(x) = e^x$ „natürliche Exponentialfunktion"

$f(x) = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+$ „allgemeine Exponentialfunktion"

($f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ „gaußsche Glockenkurve")

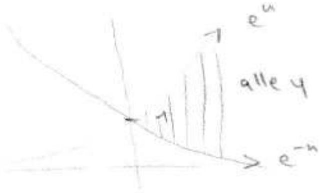
Satz

Exponentialfunktion bildet $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv ab

Beweis

Streng monoton wachsend, deshalb injektiv

Um Surjektivität zu zeigen:

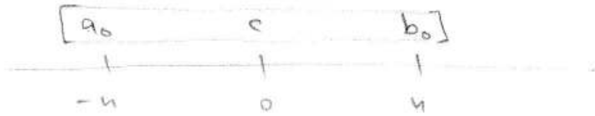


$$\left.\begin{array}{l} e^{-n} \to 0 \\ e^{n} \to \infty \end{array}\right\} \forall y \in \mathbb{R}^+ : \exists n \in \mathbb{N} \text{ sodass } e^{-n} < y \leq e^{n}$$

Wir setzen

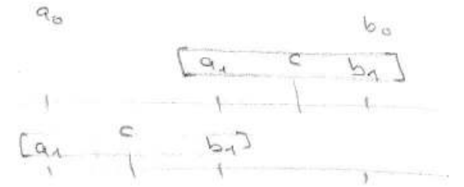
$a_0 = -n$

$b_0 = n$



Intervall $[a_0 ; b_0]$

c ist immer die Hälfte des Intervalls



wenn $e^c < y$: $a_1 = c \quad b_1 = b_0$

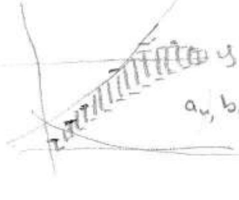
wenn $e^c \geq y$: $a_1 = a_0 \quad b_1 = c$

$e^{a_1} < y \leq e^{b_1}$

Und wir wiederholen für b_2, a_2 ... usw:

Es entsteht eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \geq 0}$

eine monoton fallende Folge $(b_n)_{n \geq 0}$



a_n, b_n nähern sich an

$a_0 \leq a_n \leq b_n \leq b_0$, daher sind diese Folgen konvergent.

$b_n - a_n$ bildet eine Nullfolge

$a_n, b_n \to \alpha$ deshalb $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = \lim\limits_{n \to\infty} e^{b_n} = e^{\alpha}$

$e^{a_n} < y \leq e^{b_n}$, $\boxed{e^x = y}$ wodurch Surjektivität / Bijektivität bewiesen ist.

Umkehrfunktion

$y = \ln x \iff x = e^y$ Logarithmus Naturalis,

Rechenregeln:

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$y = \log_a x \iff x = a^y$ Logarithmus zur Basis $a > 0$

Rechenregeln

$a^x = e^{x \ln(a)} = e^{\ln(a^x)} = a^x$

$\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Eigenschaften von Exp. Funkt.

$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum \frac{x^n}{n!}$

Die Funktion $E(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

$E(1) = e$

Satz

$\forall x \in \mathbb{R} : E(x) \cdot E(-x) = 1$

Satz

$E(x) \cdot E(y) = E(x+y)$

$E(x)E(y) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n =$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x + y + \frac{xy}{n}}{n}\right)^n = E(x+y)$

weil $x + y + \frac{xy}{n} \to x + y$

$\Downarrow$

Folgerung:

wenn $E(1) = e$ dann ist $E(x) = e^x$

Beispiel: $E(3) = E(1+1+1) =$

$E(1) \cdot E(1) \cdot E(1) = e^3$

$E(x)$ ist strikt monoton ident zu e^x

Beweis

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n < 1$

$1 - \frac{x^2}{n} \leq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n < 1$

wenn $n \to \infty$ dann $E(x) \cdot E(-x) \to 1$

Satz

$a_n \longrightarrow a$

$\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \longrightarrow E(a)$

$E(a) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$

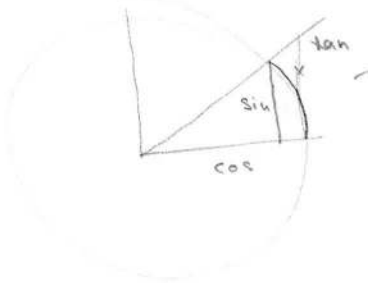
$$E(x) = e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Satz

wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\underbrace{\lim_{n\to\infty} E(a_n) = E(a)}$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{a_m}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

Winkelfunktionen



$\rightarrow \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

periodisch

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

Ausdruck als Reihe

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \dots = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad [\text{ungerade}]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad [\text{gerade}]$$

Euler'sche Formel

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{ix^3}{3!} + \dots = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) + \left(i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\right) =$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1 \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{array}$$

Rechenregeln

$$\left.\begin{array}{l} \cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \sin y \end{array}\right\} e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

Komplexe Zahlen

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \qquad \boxed{e^{i\pi} = -1}$$

Umkehrfunktionen

möglich weil Winkelfunktionen bijektiv sind!

$\sin \rightleftarrows \arcsin$

$\cos \rightleftarrows \arccos$

$\tan \rightleftarrows \arctan$

Elementare Funktionen

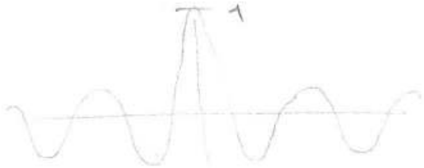
bestehen aus elementaren Bausteinen: Polynom, Logarith, Exp, Winkel, Arcus, Grundrechnungsarten

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Beispiele

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$



x ist für 0 nicht definiert aber $\exists$ Grenzwert : 1 , deshalb $f(0) = 1$

$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} \text{wenn } x > 0: & 1 \\ \text{wenn } x < 0: & -1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 0-} = -1$ $\lim\limits_{x \to 0+} = +1$ „Einseitige Grenzwerte"

Definition

$f: D \longmapsto \mathbb{R}$
$D \subseteq \mathbb{R}$

Die Funktion besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$ wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1} \longrightarrow x_0$

folgt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = c$$

Man schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \quad \begin{cases} c = \pm\infty & \text{„uneigentlicher Grenzwert"} \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle x_0

$\forall x_n > x_0 : x_n \longrightarrow c$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = c$$

Linksseitiger Grenzwert an der Stelle x_0

$\forall x_n < x_0 : x_n \longrightarrow c$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = c$$

Wichtig:
Diese Grenzwerte beziehen sich auf eine konkrete Stelle und nicht die Unendlichkeit.

Beispiel

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x+1}{x+1}$$ bei Einsatz einer beliebigen Folge $x_n \to 1$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x_n+1}{x_n+1} = \frac{\lim_{n \to \infty} (3x_n+1)}{\lim_{n \to \infty} (x_n+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Beispiel

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{1} = 3$$

Beispiel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

$x_n \to 0$ $$\frac{\lim_{n \to \infty} \sin(x_n)}{\lim_{n \to \infty} x_n}$$ nicht lösbar!

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + - \dots\right) = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \dots\right) = 1$$

Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + 9\sin\frac{1}{x}\right)}$$ konvergiert gegen 0, dadurch auch $\sin(0) = 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+9\sin\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+9\lim_{n \to \infty}\sin\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+9\cdot 0} = 1$$

Stetigkeit

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig an jeder Stelle $x_0 \in D$ wenn $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

„Stetig in D"

Bemerkung

Stetigkeit bedeutet: Grenzwertbildung = Funktionswert

Stetig an Stelle x_0 wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

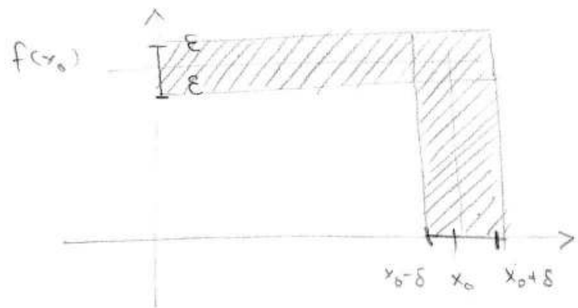
Formale Definition

$f: D \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig an $x_0 \in D$ wenn:

$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0}$: $\left(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$

Für alle ε gibt es ein zugeordnetes δ

Untersuchung von $f(x)$



$I_1 = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$

$I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Schlussfolgerung:

$\underbrace{f(x)}$ — ε

Funktionswert verändert sich wenig

$\underbrace{x}$ — δ

wenn sich das Argument wenig verändert.

Satz

Sei $f(x) = \underbrace{\sum a_n (x - x_0)^n}$

„Potenzreihe mit Entwicklungs-Punkt x_0"

- Konvergenzradius R
- f ist im Konvergenzkreis $|x - x_0|$ stetig

Eigenschaften stetiger Funktionen

Vorzeichenbeständigkeit:

Satz

$\forall f(x_0) > 0 \quad \exists U_\delta(x_0)$: $\underbrace{f(x) > 0}$ oder $\underbrace{f(x) < 0}$

$\forall x \in U_\delta(x_0)$ (vorzeichen)

Beweis

$\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, $\exists \delta$ sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$

$f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ für $|x - x_0| < \delta$

Nullstellensatz von Bolzano

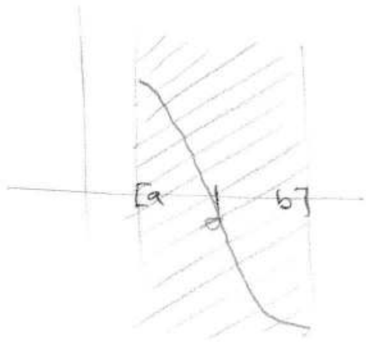
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktion mit $f(a) < 0$, $f(b) > 0$
dann muss im Intervall eine Nullstelle sein (min 1)

$$\exists\, c \in [a,b] \text{ mit } f(c) = 0$$

Beweis.

2 Folgen: a_n, b_n

$a_0 = a$
$b_0 = b$



$F = f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$

wenn:

$F < 0$: $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ $\quad b_1 = b_0$

$F > 0$: $a_1 = a_0$ $\quad b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$

$F = 0$: Nullstelle gefunden!

↘ Algorithmus, damit Folge sich der Nullstelle annähert.

konvergieren gegen selben Grenzwert c

$\begin{cases} f(a_n) < 0 & \text{wachsend} \\ f(b_n) > 0 & \text{fallend} \end{cases}$

$f(c) = 0$

↪ (Sandwich-Theorem)

Zwischenwert-Satz

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig
f nimmt jeden Wert zwischen
$f(a)$ und $f(b)$ an (min 1 mal)

Beweis

$f(a) < y < f(b)$

$g(x) = f(x) - y$

$g(a) < 0 \quad g(b) > 0$

Siehe Nullstellen Satz!

Satz

$I \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossenes Intervall und $f : I \mapsto \mathbb{R}$ stetige Funkt.
$f(I)$ ist ebenfalls abgeschlossenes Intervall

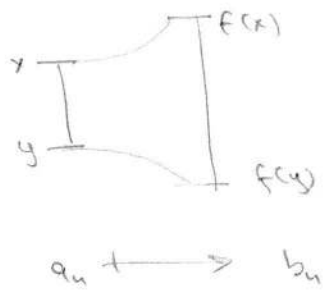
Beweis

$x, y \in I$, alle Werte liegen zwisch $f(x)$ und $f(y)$ in $f(I)$, also Intervall

$A = \sup f(I)$, $\exists\, b_n \to A$ wobei $b_n \in f(I)$ $f(a_n) = b_n$

Wenn Supremum existiert gibt es eine konvergente Teilfolge von $a_n \mapsto a$

$$f(a) = A$$



Ein Intervall hat immer ein Max und ein Min

Satz

$I = [a,b]$

$f: I \mapsto \mathbb{R}$ streng monoton, stetig $\Rightarrow$ f ist bijektiv und es existiert eine streng monotone stetige $f^{-1}(x)$

Beweis

f ist streng mon wachsend.
wegen Zwischenwertsatz übernimmt es alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im I

$$f(I) = [f(a), f(b)]$$

$f^{-1}(x)$ ist ebenfalls streng mon wachsend

$y \in f(I) \quad y \neq f(a) \quad y \neq f(b)$

$x = f^{-1}(y) \in (a,b)$ $\longrightarrow$ Beweis von Stetigkeit:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$:

$|\tilde{y} - y| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(\tilde{y}) - x| < \varepsilon$

Satz

$f(x), g(x)$ stetig

$\left.\begin{matrix} f(x) \pm g(x) \\ f(x) \cdot g(x) \\ f(x) / g(x) \end{matrix}\right\}$ auch stetig ... generell elementare Funktionen dadurch stetig! (in ihrem Definitionsbereich)

Beispiele für Unstetigkeiten:

- $f(x) = \lfloor x \rfloor = \max \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$ (Treppenfunktion)

- $f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ weil unstetige Stelle bei 0

- $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$
  - an $x = 0$ nicht definiert, aber „hebbare Unstetigkeit", dadurch, dass sich $f(0) = 0$ definieren lässt

- $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$ ist nirgendwo stetig denn in der Umgebung von jeder rationalen Zahl liegen irrationale Zahlen

(vice versa)

Differential und Integralrechnung

Pauhofer

Ableitung

Sekante

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$ beschreibt mittlere Änderung „Differenzenquotient"

Tangente

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$ Ableitung „Differentialquotient"

Wenn

$\frac{df}{dx}(x_0)$ existiert ist f an x_0 differenzierbar

Kettenregel

$$F'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \qquad \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

(*) Wenn f invertierbar ist: $\exists f^{-1}(x)$ und die Ableitung keine Nullstellen hat $\Rightarrow$ f ist streng monoton

$$f: D \mapsto f(D)$$

$$\forall y \in f(D): \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beweis:

$f(x) = y \quad f(x_0) = y_0 \Rightarrow f$ und f^{-1} sind stetig: $\boxed{\text{wenn } x \to x_0 \text{ dann } y \to y_0}$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Beispiel:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$y = x^3 \rightsquigarrow$ Umkehrung: $x = \sqrt[3]{y}$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$$f^{-1\,\prime}(y) = \frac{1}{3x^2} = \underbrace{\frac{1}{3 \cdot (\sqrt[3]{y})^2}}_{\text{Ableitung der Umkehrfunktion}}$$

Ableitung der Umkehrfunktion

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y)})}$$

x ist Umkehrfunktion wenn y Funktion ist

Beispiel

$f(x) = \ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} y = \ln(x) \\ e^y = x \end{array}\right\} \quad f^{-1'}(y) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^y}} = e^y$$

Angenommen man kennt die Ableitung von y bzw f(x) nicht

$$f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

ln(x)

$$f'(x) = \frac{1}{f^{-1'}(y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} = \text{Ableitung von } \ln(x)$$

bekannte Funktion

Höhere Ableitungen

$$f^n(x) = \frac{d^n f}{dx^n} \qquad f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

„Inneres Intervall"

$$I = [a; b] \Rightarrow \mathring{I} = (a; b)$$

Analyse von Potenzreihen

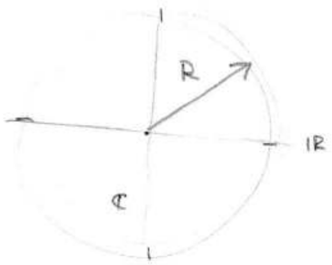
Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \longrightarrow x_0 \text{ und Regel für } a_n \text{ müssen definiert werden}$$

Eine Taylor-Reihe
ist auch eine Potenzreihe die immer konvergiert

Potenzreihen werden dazu benutzt um schwierigere Funktionen zu approximieren. Wenn sie an x gegen $\pm\infty$ divergieren dann sind sie nutzlos.

Wenn $x \in \mathbb{C}$



$|x - x_0| < R$ konvergiert

$|x - x_0| > R$ divergiert

$|x - x_0| = R$ keine Aussage möglich

Definition des Radius

R = Konvergenzradius

$$R := \text{Max}\left\{ |x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ konvergiert} \right\}$$

Konvergenzbereich $(x_0 - r \,;\, x_0 + r)$

Berechnung

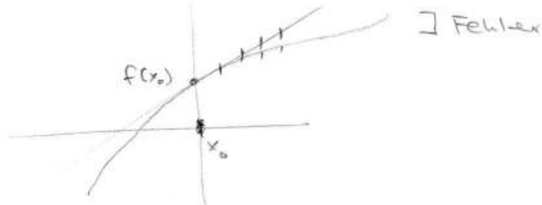
$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$ nach Wurzelkriterium (sup macht es präziser)

Wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \infty & \Rightarrow R = 0 \\ 0 & \Rightarrow R = \infty \end{cases}$

Sei f differenzierbar:

lineare Approximation von $f(x)$ ($T_1(x)$ Taylor-Polynom 1. Grades)

$$f(x) \approx \underbrace{f(x_0)}_{d} + \underbrace{f'(x_0)}_{k} \cdot \underbrace{(x - x_0)}_{x}$$



$$R(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$
$$= f(x) - T_1(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

Differenzierbarkeit

$f(x)$ ist genau dann differenzierbar in x_0 wenn

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + R(x) \qquad R(x) \in o(x - x_0)$$

Potenzreihen

komplizierte Funktionen lassen sich mit Potenzreihen beschreiben.

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Funktion}} = \sum_{n \geq 0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$f'(x) = \sum_{n \geq 0}^{\infty} n\, a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Funktion — Potenzreihe mit Konvergenzradius R

Die Reihen konvergieren in R gegen $f(x)$ und sind differenzierbar

Konvergenzradius bleibt bei Ableitung gleich

„Eindeutigkeits-Satz zu Potenzreihen"

$f(x)$ in $U_\varepsilon(x_0)$ = Potenzreihe mit $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

ist eindeutig bestimmt

„Abel'scher Grenzwert-Satz"

Potenzreihe konvergiert in R: $\sum_{n \geq 0} a_n R^n = \lim_{x \to R^-} f(x)$

Wichtig: Damit $f(x)$ sich als Taylor - **Reihe** darstellen lassen kann muss es ∞ oft differenzierbar sein.

Wenn es aber nur n-Mal (bzw n+1 Mal mit Restglied) differenzieren lässt:

Taylor - **Polynom**

$$T_n(x) = \sum_{n \geq 0}^{n} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

wenn $x_0 = 0$ und Reihe „McLaurin Reihe"

$$f(x) = T_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

Satz von Taylor

wenn f in $\mathring{I}$ von $[x_0 ; x]$ oder $[x ; x_0]$ n+1-Mal differenzierbar, gilt:

$\exists\ \xi \in \mathring{I}$ sodass:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied von Lagrange}}$$

Der verallgemeinerte Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Problem:

$$\lim_{x \Rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{unbestimmte Werte} \quad \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

Lösung:

Wenn f und g auf $[a;b]$ differenzierbar und stetig

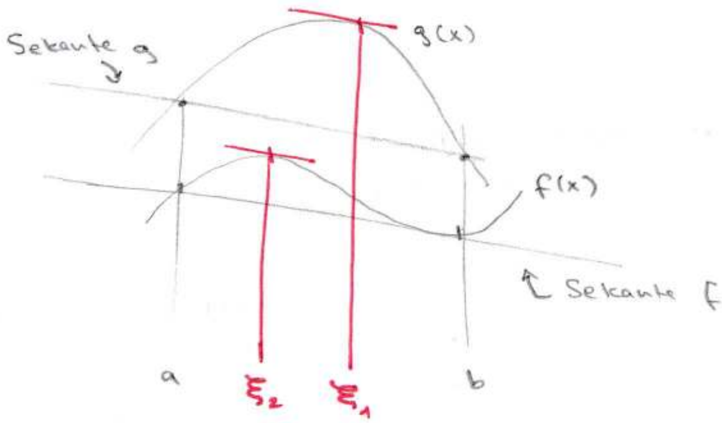
$x \in (a,b)$ und $\xi \in (a,b)$ sodass:

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Wegen Mittelwertsatz

$\exists \xi_1 \wedge \exists \xi_2$

$$f'(\xi_1) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad g'(\xi_2) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$



Behauptung:

$\exists \xi$ der diese Bedingung sowohl bei f als auch g erfüllt.

$\exists \xi$ sodass $\xi = \xi_1 = \xi_2$ $\quad \xi =$ „Zwischenstelle"

$$f'(\xi) = g'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

Dann existiert auch

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\text{Sekante } f}{\text{Sekante } g} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweis:

Nach Mittelwertsatz

$\exists \xi \in (a;b) : g'(\xi) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b-a}$

weil $g'(x) \neq 0$ wegen Bruch in ursprünglicher Gleichung $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ folgt

$g(b) - g(a) \neq 0$

$$\boxed{F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))}$$

$F(a) = 0 - 0 = 0$

$F(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{\cancel{g(b) - g(a)}} \cdot (\cancel{g(b) - g(a)}) = 0$

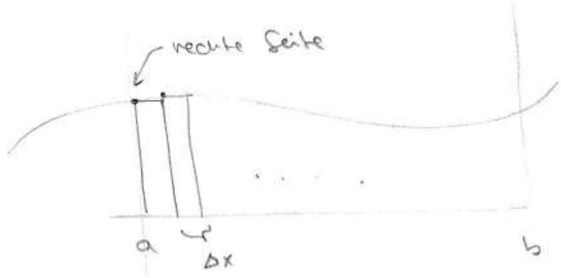
$F(a) = F(b) = 0$

deshalb $\exists \xi \in (a;b)$ mit $F'(\xi) = 0$

$F(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$

Riemann'sche Summennotation

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$



$a = x_0$

$x_1 = x_0 + \Delta x$

$x_2 = x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x$

$\vdots$

$x_k = x_0 + k\Delta x$

$x_k = a + k\Delta x$

Approximation der darunter liegenden Fläche

$$f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \ldots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\, \Delta x$$

Maximale Präzision durch kleinstmögliche Δx

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x = \int_a^b f(x) \underbrace{dx}_{\text{unendlich klein}}$$

wobei

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Das unbestimmte Integral / Stammfunktion

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

Grundregeln

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \text{wenn } \alpha \notin \mathbb{N},\ x \neq 0 \qquad \text{wenn } \alpha \notin \mathbb{Z},\ x \geq 0$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int x^{-1}\, dx = \ln(x) + c$$

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$
$$\cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \int (1 + \tan^2(x))\, dx = \tan x + c \qquad \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c \qquad \text{für } -1 < x < 1$$

Integrationstechniken

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

Gegenteil von der Ableitungsregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Partielle Integration

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = f(x)\, G(x) - \int f'(x)\, G(x)\, dx$$

Gegenteil von der Kettenregel $f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Substitutionsregel

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))$$

Beweis:

Wenn $g(x)$ die Umkehrfunktion $g^{-1}(x)$ besitzt

$$\int f(u)\, g'(x)\, dx = F(u) \qquad g(x) = u$$

$$F(u) = \int f(u)\, du$$

Schreibweise in Leibnitz-Form:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

$$g(x) = u \implies \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} u \Rightarrow g'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = g'(x)\, dx$$

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{f(u)}\, \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = \int f(u)\, du$$

Anschließend $f(u)$ integrieren und u zurücksubstituieren $(g(x))$

Integrationsbeispiele

a) $\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g} = x \cdot \sin(x) \cdot \int 1 \cdot \sin(x)\, dx = x \sin x + \cos x + C$

b) $\int \ln(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{g} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + c$

c) $\int \underbrace{x^2}_{f} \underbrace{e^x}_{g}\, dx = x^2 e^x - 2 \int x\, e^x\, dx$

$= x^2 e^x - 2 \left(x \cdot e^x - \int e^x\, dx \right) = (x^2 - 2x + 2)\, e^x + c$

d) $\int a^x\, dx = \int e^{x \ln a}\, dx =$

$\boxed{a^x \Rightarrow x \ln(a) \Rightarrow e^{x \ln(a)}}$

Substitutionsregel zusammengefasst:

$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x))$

$\int f(u) \frac{du}{dx}\, dx = \int f(u)\, du$

1. u festlegen
2. dx ermitteln
3. einsetzen in ursprüngliche Form
4. u wieder ändern

1. $u = x \ln x$

2. $\frac{du}{dx} = \ln x$ weil $(c \cdot x)' = c$

$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\ln x}$ $dx = \frac{du}{\ln x}$

3. $\int e^{x \ln a}\, dx = \int e^u \frac{du}{\ln x} =$

$\frac{1}{\ln x} \int e^u\, du = \frac{1}{\ln x} \cdot e^u + c =$

$\frac{1}{\ln x} \cdot e^{x \ln(a)} + c = \frac{1}{\ln x} a^x + C$

e) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \sin(x) \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{-\cancel{\sin x}\,1} = \int -\frac{1}{u} du =$

$u = \cos x$ $\qquad = -\ln|u| + c =$

$\frac{du}{dx} = -\sin x \qquad du = -\sin x \, dx \qquad = -\ln(\cos x) + c$

$dx = \frac{du}{-\sin x}$

f) $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{1}{\cancel{4}_2} \int \frac{1}{u^2+1} \cancel{2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{2} \arctan u + c$

$u = \frac{x}{2}$ $\qquad = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \qquad \frac{dx}{du} = \frac{2}{1} \qquad dx = 2\,du$

g) $\frac{1}{x^2+4x+10} = \frac{1}{(x+2)^2+6}$

$\int \frac{1}{(x+2)^2+6} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\left(\frac{(x+2)}{\sqrt{6}}\right)^2+1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{u^2+1} \cdot \sqrt{6}\, du =$

$u = \frac{x+2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} x + \frac{2}{\sqrt{6}} \qquad = \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan(u) + c$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{6}} \qquad = \frac{\sqrt{6}}{6} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + c =$

$dx = \sqrt{6}\, du \qquad = \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + c$

h) $\int \frac{1}{ax+b} dx =$ $\qquad a^{0,5} \cdot a^{-1} = a^{0,5-1} = a^{-0,5}$

$\int \frac{1}{u} \cdot \underbrace{\frac{du}{a}}_{dx} = \frac{1}{a} \int \frac{1}{u} du =$

$\frac{1}{a} \ln|u| + c = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

$u = ax+b$

$\frac{du}{dx} = a \qquad dx = \frac{du}{a}$

Differentialrechnung mit mehreren Variablen

$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Skalarwertig / Skalarfelder

3 Dimensionale Darstellung durch Punkte-Menge

$\{ (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in D \}$

2 Dimensionale Darstellung durch Höhenlinien / Isophysen

$\{ (x,y) \in D \mid f(x,y) = z \}$

$f: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$

Vektorwertig / Vektorfelder

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ \sin(x,y) + e^y \end{pmatrix}$$

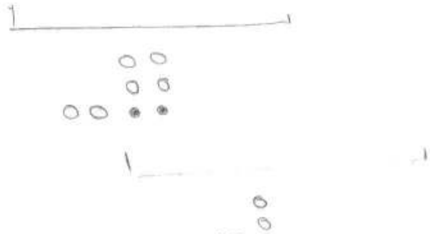
„Quadratische Formen"

$q: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$q(x) = x^T A x$ A ist symmetrisch: $A^T = A$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \quad q(x,y) = (x,y) \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4x^2 - 10xy + 9y^2$$



Definitheit von quadratischen Formen

Wenn für $\forall (x,y) \setminus \{(0,0)\}$:

$q(x,y) > 0$	positiv definit
$q(x,y) < 0$	negativ definit
$q(x,y) \geq 0$	positiv semidefinit
$q(x,y) \leq 0$	negativ semidefinit

$\downarrow$

ebenso wie Matrix A

Lässt sich auch als Summe zweier Quadrate schreiben:

$$q(x,y) = (2x - \tfrac{5}{2} y)^2 + \tfrac{11}{4} y^2 > 0$$

ausgenommen: $(0,0) = 0$

Bestimmung von Definitheit

Hauptminoren Kriterium
im Buch: S. 447

Definition

G ist symmetrisch: $G^T = G$

wenn $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$x^T G x > 0$ positiv definit

$x^T G x < 0$ negativ definit

$x^T G x = 0$ indefinit

Beispiel

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

wenn diagonalen Elemente >0 positiv definit
<0 negativ definit

Hauptminoren - Kriterium

Hauptminor = Determinante einer Haupt - Untermatrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2+c \end{bmatrix}$$

$\Delta_1 = 2$

$\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3$

$\Delta_3 = \det[B] =$

Laplace Entwicklung nach der ersten Reihe:

$$2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2+c \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2+c \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3c$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2+c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2+c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Tipp:
Man darf Hauptminoren auch von rechts unten bilden

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

- Wenn alle Hauptminoren >0: positiv Definit
  $\Delta k > 0$
- Wenn alternierend und erstes negativ: negativ Definit
  $(-1)^k \Delta k > 0$
- Semidefinit wenn $\geq$ statt $>$
  positiv semidefinit $\Delta k \geq 0$
  negativ semidefinit $\Delta k \cdot (-1)^k \geq 0$
- Indefinit: alle anderen Fälle

Beispiel

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

In 2x2 Matrix betrachtet man nur

$$g_{11} \wedge g_{11} \cdot g_{22} - \underbrace{g_{12} \cdot g_{21}}_{\text{ident weil symmetrisch}}$$

Beispiel

Bestimmung der Definitheit

Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ_5	...	
+	+	+	+	+		pos def (einziger Fall)
−	+	−	+	−		neg def (einziger Fall)
−	0	−	+	−		neg semi def (neg def mit random Nullen)
−	0	0	+	−		neg semi def
+	+	+	0	0		pos semi def
−	−	−	−	−		indefinit
+	−	+	−	+		indefinit
+	0	−	−	+		indefinit

Tricks bei Bestimmung von Definitheit

- Zeilen und Spalten vertauschen

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ keine Aussage möglich $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -4$, $\Delta_3 = 0$ $\rightarrow$ Indefinit also Sattelpunkt

- Hauptdiagonale = 0 $\rightarrow$ Indefinit

$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

- Diagonalmatrix

$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ wenn alle positiv : pos definit
alle negativ : neg definit
beide Werte : indefinit

- Hauptdiagonale beobachten

Wenn in einer vollgefüllten Matrix die Hauptdiagonale (\ ) sowohl pos als auch neg Zahlen hat $\Rightarrow$ indefinit

- Nullmatrix gleichzeitig pos und neg Semidefinit

Grenzwert und Stetigkeit

Umgebung:

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| < \varepsilon \right\}$$

$n=1$ Intervall

$n=2$ Kreisscheibe

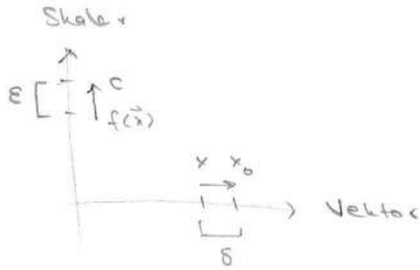
$n=3$ Kugel

Stetigkeit:

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^n}_{D} \mapsto \mathbb{R} \qquad f(x_0) = c$$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c \to$ jene Zahl für die gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0$$
$$\forall \vec{x} \in D : 0 < \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| < \delta$$
$$| f(\vec{x}) - c | < \varepsilon$$



Bei $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

Bei $f: \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$

$$\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}), \dots f_n(\vec{x}))$$

wie oben, nur bei „$|f(\vec{x}) - c|$" (Skalar - Skalar) stattdessen

$$\| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{c} \| \text{ (Vektor - Vektor)}$$
$$\uparrow$$
$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{c}$$

Alle Koordinaten-Funktionen sind stetig

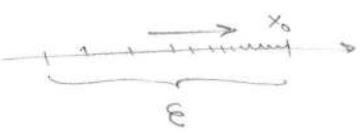
Grenzwert mit Folgen:

$f: D \mapsto \mathbb{R}^n$ Die Folge $(\vec{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $\vec{y}$ wenn

$\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\quad \in D \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \in D$

für alle $\varepsilon > 0$ ein N existiert, so dass $\| \vec{x}_n - \vec{x} \| < \varepsilon$ für alle $n > N$



Beispiel

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$$

Unstetig weil:

An Stelle $(0,0)$: $f(0,0) = 0$

$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ existiert nicht

$\downarrow$

Beweis: Man stelle die Gerade $x = y$ auf

$f(x,x) = f(y,y) = \frac{2}{2} = 1$

Die Gerade $x = -y$

$f(x,-x) = f(y,-y) = -1$

Beide in Umgebung des Ursprungs, aber

es existiert ein Sprung in der Funktion

Stetigkeit mit Folgen:

$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ genau stetig an $\vec{x} \in D$ wenn
$\in D$

$\lim_{n \to \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x})$ für $\forall \vec{x}_n \in D$ und $\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$

$\uparrow$ Folge $\qquad \uparrow$ Konvergenz Punkt

Interessant

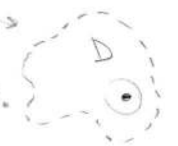
Ähnlich wie bei $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ ändern Funktionen (die nicht bei 0 sind) (und) stetig sind nicht plötzlich ihr Vorzeichen!

SPRUNG!

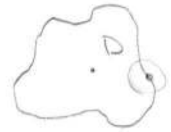
Untersuchung der Definitionsmenge D

$D \subseteq \mathbb{R}^n$

(;) Offene Menge: $\exists \varepsilon > 0 : \forall \vec{x} \in D : U_\varepsilon(\vec{x}) \subseteq D$ →



[;] abgeschlossene Menge: Grenzwert jeder konvergierend. Folge in D liegt wieder in D



Wenn Folge gegen Rand konvergiert, ist Rand Teil von D

bzw.: Randpunkte $\in D$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \vec{x} \in D : U_\varepsilon(\vec{x}) \cap D \neq \emptyset$

$U_\varepsilon(\vec{x}) \cap \mathbb{R}^n \setminus D \neq 0$

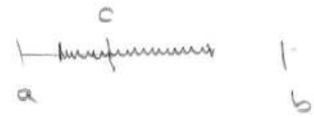
kompakte Menge: ~~offen~~ beschränkt und abgeschlossen zugleich

Beispiele

- offenes Intervall $(a;b)$ ist offene Menge in $\mathbb{R}$

  Angenommen $c \in (a;b)$, dann $U_\varepsilon(c) \in (a;b)$

  bzw $\left(\frac{a+c}{2} ; \frac{b+c}{2}\right) \subseteq (a;b)$



- Kreisscheibe ohne Rand ist offene Menge in $\mathbb{R}^2$ aber nicht in $\mathbb{R}^3$

  (da sind $U_\varepsilon(x \in \mathbb{R}^3)$ Kugeln)

- abgeschlossenes Intervall $[a;b]$ ist abgeschlossen $\wedge$ kompakt in $\mathbb{R}$
- Kreisscheibe / Kreis mit Rand —— " —— in $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$
- $\mathbb{R}$ ist gleichzeitig offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}$

Satz

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ ist stetig und D ist eine kompakte Menge.

Daraus folgt:

f ist auf D beschränkt und hat in D dadurch ein Maximum und Minimum

(weil Randpunkte $\in D$)

Partielle Ableitung

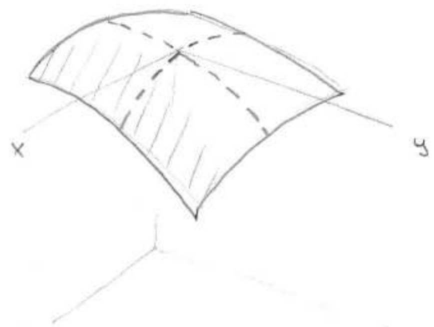
von Funktionen mit 2 variablen

$\mathbb{R} \rightarrow$ Steigung der Tangente

$\mathbb{R}^2 \rightarrow$ Steigung auf 2 Achsen von Ebene : Tangentialebene

Man beobachtet

$x \mapsto f(x,y)$ und $y \mapsto f(x,y)$



Definition

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

f ist in (x_0,y_0) partiell nach x, y differenzierbar wenn

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

Wenn f_x, f_y stetig sind: „Stetig partiell differenzierbar"

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}(x,y) = f_{y,x}(x,y)$$

Satz von Schwarz

→ nur gleich wenn stetig ∧ in offener Menge

Die Tangentialebene

$T(x_0,y_0)$ durch Parameter-Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Umformung

$$z = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{d} + \underbrace{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)}_{k_1 \cdot x} + \underbrace{f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{k_2 \cdot y}$$

Bei $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Tangente: $f(x) = \underbrace{f'(x)}_{k} \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{x} + \underbrace{f(x_0)}_{+d}$

Selbst wenn partielle Ableitung existiert muss nicht Tangentialebene existieren !

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{0} = 0$$

während $f_y(0,0) = 0$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

unstetig an $(0,0)$

$\Rightarrow$ [$\exists$ Tangenten Richtung x und y aber
$\nexists$ Tangentialebene]

Partielle Ableitung von Vektorwertigen Funktionen

$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

ableitbar

partiell ~~integrierbar~~ $\neq$ stetig
total ~~integrierbar~~ $=$ stetig

Die totale Ableitung

Wenn stetig, dann lässt sich Tangentialebene bilden

Tangente : $t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

eigentlich auch $T_1(x)$ wobei Fehler bei $x_0 \Rightarrow 0$

Tangentialebene
(nur für $\mathbb{R}^3$ bzw $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$)

Ableitung ist Jacobi-Matrix bzw Funktionalmatrix
zugleich auch lineare Abbildung $J_f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

Definition

$D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen

$f : D \mapsto \mathbb{R}^m$ ist bei $\vec{x}_0$ „total differenzierbar" wenn $f' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

bzw Jacobi-Matrix, so dass

$$f(x) = f(x_0) + f'(x - x_0) + \boxed{R(x)} \text{ Fehler.}$$

Wobei $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x - x_0\|} = \vec{0}$

$f' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ist eine „lineare Abbildung" $f(x) = Ax$ mit Jacobi-Matrix.

Interpretation in $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$x_0 = (x_0, y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \overbrace{(j_1, j_2)}^{J_f} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x,y)$$

$$f(x, y_0) = f(x_0, y_0) + (j_1, j_2) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} + R(x, y_0) = f(x_0, y_0) + j_1 (x - x_0) + R(x, y_0)$$

dadurch, dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x, y_0)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow j_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = f_x(x_0, y_0)$$

Definition

Sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ dann

$$J_f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

$$\operatorname{grad} f = (J_f)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{grad} f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_0} \\ \frac{\partial f}{\partial y_0} \end{pmatrix}$$

Totale Ableitung:

mit Jacobi-Matrix: Lineare Abbildung

mit Gradient: Skalar Multiplikation

$$f(x) = f(x_0) + j(x - x_0) + R(x) \qquad j(x) = J_f \cdot x$$

$$f(x) = f(x_0) + \langle \operatorname{grad} f(x_0), (x - x_0) \rangle + R(x)$$

Satz

Wenn f total differentierbar, dann jede Komponente von J_f auch stetig

Jede total differentierbare Funktion ist auch partiell ~~integrierbar~~ ableitbar

Zusammenhänge verstehen:

Ableitung in $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$: $\frac{df}{dx} = f'(x_0)$ $\quad df = f'(x_0) \cdot \underbrace{dx}_{\text{unendlich kleine Änderung von } x}$

Ableitung in $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$: grad $f(x_0)$

$d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$ → unendlich kleine Änderung in Richtung von allen Komponenten

$\underbrace{df}_{\text{das vollständige Differential von } f \text{ an } x_0} = \text{grad} f(\vec{x}_0) \cdot d\vec{x} = f_{x_1}(x_0)\, dx_1 + \dots + f_{x_n}(x_0)\, dx_n$

$\frac{df}{d\vec{x}} = \text{grad } f(x_0)$

nach allen Komponenten von $\vec{x}$

Implizite Funktionen

$F: D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (Funktion selbst muss nicht stetig sein)

D: offene Menge

Punkt $P = (x_0, y_0)$

$F(x_0, y_0) = 0$ (Nullstelle)

$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ (keine Extremstelle nach y-Achse)

$\Downarrow$

In $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ mit bestimmten ε, sodass $F(x,y) = 0$ mit Lösung $y(x)$

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}$$

Ableitungsregeln

Summenregel

$$(f+g)' = f' + g'$$

Produktregel

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\text{grad } h(x_0) = f(x_0) \cdot \text{grad } g(x_0) + g(x_0) \text{ grad } f(x_0)$$

Kettenregel

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$$

$$g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^n \qquad \text{also: } g(\mathbb{R}) \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n \qquad g(i) = \begin{pmatrix} g_1(i) \\ \vdots \\ g_n(i) \end{pmatrix}$$

$$F(x) = f(g(x))$$

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}\begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} \cdot g_i'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix} \cdot g_i'(x)$$

$$\frac{dF}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial g_i} \cdot \frac{dg_i}{dx} \longrightarrow \frac{\partial (f \circ g)}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial g}(g(x_0)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0)$$

Satz

$$\underbrace{\frac{\partial f^{-1}}{\partial x}}_{J_{f^{-1}}}(y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \right)^{-1} \qquad \text{wobei } y_0 = f(x_0)$$

Taylor - Entwicklung

$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$

$(x,y) = (x_0 + h, y_0 + k)$

(x_0, y_0) $\quad F(t) = f(x_0 + th,\ y_0 + tk)$

Herleitung:

Entwicklung nach $(x_0, y_0) = F(0) \quad t_0 = 0$

$$F(t_0) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \frac{F'''(0)}{3!}t^3 + \dots$$

$$f(x,y) = F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \frac{F'''(0)}{3!} + \dots + \frac{F^n(0)}{n!} + \underbrace{\frac{F^{n+1}(\xi)}{n+1!}}_{\text{Lagrange Fehler}}$$

Berechnung der einzelnen Ableitungen:

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k$$

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x \partial y}}_{\text{Satz von Schwarz}}(x_0, y_0) h \cdot k + \frac{\partial f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2$$

Differentialoperatoren

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad D_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

vereinfacht:

$$F''(0) = h^2 D_x^2 f(x_0, y_0) + 2hk\, D_x D_y f(x_0, y_0) + k^2 D_y^2 f(x_0, y_0) =$$

$$(h D_x + k D_y)^2 \cdot f(x_0, y_0)$$

$$F'''(0) = (h D_x + k D_y)^3 f(x_0, y_0)$$

Taylor Polynom

$\xi \in (0; 1)$

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(h D_x + k D_y)^k f(x_0, y_0)}{k!} + \underbrace{\frac{(h D_x + k D_y)^{n+1} f(x_0 + \xi h, y_0 + \xi k)}{(n+1)!}}_{\text{Fehler (auslassen bei Taylor-Reihe)}}$$

Die Richtungsableitung

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ skalarwertige funkt.

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist normiert : $\|\vec{v}\| = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla_{\vec{v}}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Wenn $f(x)$ mit offener Definitionsmenge ist und total differenzierbar

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \text{grad} f, \vec{v} \rangle$$

(Wenn $\vec{v} = \binom{1}{0}$ $\nabla_v(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$)

$\vec{v} = \binom{0}{1}$ $\nabla_v(x) = \frac{\partial f}{\partial y}$

Eigenschaften des Gradienten

grad f : Richtung des größten Anstiegs und

$\|$grad f$\|$; Wert des Anstiegs

Weil grad f immer rechtwinkelig zu Niveaulinien steht

Die Hesse-Matrix

positiv Definit : Minimum
negativ Definit : Maximum
indefinit : Sattelpunkt

positiv Semi-Definit : Minimum / Sattelpunkt
negativ Semi-Definit : Maximum / Sattelpunkt

Aufbau:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & \cdots & f_{x_1 x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & \cdots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Wenn ein lokales / globales Maximum vorliegt : grad $f(x) = 0$
aber das ist nicht hinreichend genug. So nur „stationärer Punkt"

Die Hesse - Matrix

Angenommen wir haben „stationären Punkt" mit grad $f(\vec{x}) = 0$ ermittelt wollen wir wissen, ob es ein lokales Max / Min / Sattelpunkt ist

Bestimmung der Definitheit

Minimum - positiv Definit : $f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot H(x_0) \cdot \vec{x} > 0$

Maximum - negativ Definit : $f(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot \underbrace{H(x_0)}_{\text{Hessematrix für Punkt } \vec{x}_0} \cdot \vec{x} < 0$

Sattelpunkt - sonst :

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Beispiel:
Hesse - Matrix in $\mathbb{R}^3$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Tricks zur Bestimmung der Definitheit, ohne $f(\vec{x}) = \vec{x}^T H(\vec{x}_0)\, \vec{x}$ für alle $\vec{x}$ zu überprüfen:

1. Hauptminoren - Kriterium

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{23} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \det |a_{11}| = a_{11}$$

$$\Delta_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\Delta_3 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \ldots$$

(Darf man auch von rechts unten bilden, statt links oben)

Beispiel:

$$H(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = 1 \quad -$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 0 = -2 \quad +$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 4 = 4 \quad +$$

(Die Zeilen und Spalten dürfen zeitgleich gemeinsam vertauscht werden) - Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

MINIMUM

SATTELPUNKT

MAXIMUM

positiv definit

positiv semidefinit

indefinit

negativ semidefinit

negativ definit

$\forall$ Hauptminoren positiv

$\Delta_k > 0$

$+ + + + + \dots$

$\Delta_k \geq 0$

$0 + 0 0 0 + + +$

$(-1)^k \Delta_k \geq 0$

$- + - + 0 + \dots$

$\forall$ Hauptminoren alternierend

$\Delta_1 < 0$

$\Delta_2 > 0$

$\Delta_3 < 0$

$(-1)^k \cdot \Delta_k > 0$

$- + - + - + \dots$

$\boxed{\text{Alle anderen Fälle}}$

Weitere Eigenschaften:

1. Alle Elemente in Diagonale $= 0$ $\begin{pmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{pmatrix}$ => indefinit
2. Hauptdiagonale von beliebiger Matrix $\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$ pos und neg => indefinit
3. Nullmatrix kann alles sein

2. Spektralsatz (über Eigenwerte)

(kompliziert, wenn keine Diagonalmatrix)

$$\begin{pmatrix} \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \circ \\ \circ & \circ & \times \end{pmatrix}$$ $\times$ = „Eigenwerte"

positiv Definit = Alle Eigenwerte positiv

negativ Definit = Alle Eigenwerte negativ

indefinit = Gemischt

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

S. 309
312] perfekte Zusammenfassung

Beispiel

$g = 9{,}81\ ms^{-2}$

$s''(t) = g$

$\int s''(t)\,dt = \int g\,dt$

$s'(t) = gt + c_1$

$\int s'(t)\,dt = \int gt + c_1\,dt$

$s(t) = \frac{g}{2}t^2 + c_1 t + c_2$ → c_1 und c_2 bestimmt durch Anfangsbedingungen

Definition

$F(x, y, y', y'', \dots y^{(k)}) = 0$

„gewöhnliche DGL k-ter Ordnung"

Implizit Bsp: $F(x, y, y') = 0$

Explizit Bsp: $y' = f(x, y)$

Lösung $y(x)$ welche mit Ableitungen von sich die DGL erfüllt:

- allgemein beinhaltet Parameter $c_1, c_2, \dots$
- partikulär nach spezieller Parameter-Wahl zu vorgegebenen Anfangsbed.
- singulär kann nicht durch Parameter erhalten werden

Lineare DGL erster Ordnung

$$y' + \underbrace{a(x)}_{\text{Koeffizient}} \cdot y = \underbrace{s(x)}_{\text{Inhomogener Anteil „Störfunktion"}}$$

Lösungsgesamtheit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

→ allgemeine Lösung des homogenen Teils $y' + a(x)\,y = 0$

→ beliebige partikuläre Lösung von inhomogener Gleichung

Lösungsweg

1. Bestimmung von y_H durch „Separation der Variablen"
2. Bestimmung von y_p durch „Variation der Konstanten" („Ansatz")
   (c in y_H mit $C(x)$ ersetzen)
3. Ermittlung der Lösungsgesamtheit durch
   $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

NUMERISCHE MATHEMATIK

Fehlerproblematik in der angewandten Mathematik

1. Eingangsfehler
   - Modellfehler (Abstraktion des Modells)
   - Datenfehler (Messfehler)

Bei Modellierung: reales Problem ≠ modelliertes P.

2. Verfahrensfehler
   (Durch Approximation bei Berechnung)

Bei Berechnung: Approximation

3. Rechen / Rundungsfehler
   (Maschinenfehler)

Komponenten 1,2,3 müssen ein gutes Verhältnis haben

---

1. Eingangsfehler

Fehler bei Eingangsdaten = Kondition

Beispiel

y = Lösung
x = Eingabe

$f(x) = y$

exakter Wert: x
gestörter Wert: $\tilde{x}$

$$|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq K \cdot |\tilde{x} - x|$$

„Konditionszahl"

kleinst-mögliches K: „$K = K_{abs}$" für $x \to \tilde{x}$ $\quad K_{abs} = |f'(x)|$

absolute Konditionszahl

$$\frac{|f(\tilde{x}) - f(x)|}{|f(x)|} \leq K \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$$

„Konditionszahl"
relativer Fehler

$$K_{rel} = \frac{|x|}{|f(x)|} |f'(x)|$$

2. Verfahrensfehler

Approximation zB durch Taylor-Polynom: Fehler: $R(x)$

3. Rechnen mit Maschinen / Rechenfehler

Durch Gleitkomma-Darstellung